

Espaces Préhilbertiens Réels

SUP

E sera un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension quelconque (finie ou non)

I) Généralités

1) Produit scalaire

Def 1

On appelle **produit scalaire** sur E toute application ϕ de $E \times E$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

1) $\forall x, x' \in E, \forall y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \phi(\alpha x + x', y) = \alpha \phi(x, y) + \phi(x', y)$
« ϕ est dite **linéaire par rapport à la 1^{ère} place** »

2) $\forall x \in E, \forall y, y' \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \phi(x, \alpha y + y') = \alpha \phi(x, y) + \phi(x, y')$
« ϕ est dite **linéaire par rapport à la 2^{ème} place** »

3) $\forall x, y \in E, \phi(x, y) = \phi(y, x)$
« ϕ est dite **symétrique** »

4) $\forall x \in E \setminus \{0\}, \phi(x, x) > 0$
« ϕ est dite **définie positive** »

RIR 1

1) et 2) font de ϕ une **forme bilinéaire** sur E .

RIR 2

Un produit scalaire est ainsi une **forme bilinéaire symétrique définie positive**.

RIR 3

$$\left(\begin{array}{l} \phi \text{ est une forme bilinéaire} \\ \text{symétrique} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \phi \text{ linéaire par rapport à la 1}^{\text{ère}} \text{ place} \\ \phi \text{ est symétrique} \end{array} \right.$$

Démo de RIR 3

($\Rightarrow$) OK

($\Leftarrow$) ϕ linéaire par rapport à la 2^{ème} place ?

$$\begin{aligned} \phi(x, \lambda y + y') &= \phi(\lambda y + y', x) \quad (\phi \text{ sym}) \\ &= \lambda \phi(y, x) + \phi(y', x) \quad (\phi \text{ lin par rapport à la 2}^{\text{ème}} \text{ place}) \\ &= \lambda \phi(x, y) + \phi(x, y') \quad (\phi \text{ sym}) \end{aligned}$$

RIR 4

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique. On a :

$$\phi \text{ définie positive} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i)} \quad \forall x \in E, \phi(x, x) \geq 0 \\ \text{ii)} \quad \forall x \in E, \phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Démo de RIR 4

($\Rightarrow$)

i) $\forall x \in E, \phi(x, x) \geq 0$?

$$\text{Si } x \neq 0, \phi(x, x) > 0 \Rightarrow \phi(x, x) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Si } x = 0, \phi(x, x) &= \phi(0, 0) \\ &= 0 \geq 0 \quad (\phi \text{ lin par rapport à la 1}^{\text{ère}} \text{ place}) \end{aligned}$$

ii) $\phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$?

Par contre-poilé, on a que : $(x \neq 0 \Rightarrow \phi(x, x) \neq 0)$

$$\begin{aligned} \text{Ce qui est vrai, car } x \neq 0 &\Rightarrow \phi(x, x) > 0 \\ &\Rightarrow \phi(x, x) \neq 0 \end{aligned}$$



($\Leftarrow$)

Soit $x \neq 0$. M que $\phi(x, x) > 0$

On a $x \neq 0 \Rightarrow \phi(x, x) \neq 0$

Or $\phi(x, x) > 0$, alors $\phi(x, x) > 0$



Prop 2

! $\left(\phi \text{ est un produit scalaire sur } E \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \phi \text{ est symétrique} \\ 2) \phi \text{ est linéaire par rapport à la 1ère place} \\ 3) \forall x \in E, \phi(x, x) \geq 0 \\ 4) \forall x \in E, \phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$

Démo vient de ce qui précède.

Notations

Soit ϕ un produit scalaire sur E .

$\phi(x, y)$ se note par l'une des notations suivantes:

$\langle x | y \rangle$ ou $\langle x, y \rangle$ ou $(x | y)$ ou $x \cdot y$

Exemples rapides

Développer les produits scalaires suivants:

$$\langle x+y | x+y \rangle ; \langle x-y | x-y \rangle ; \langle x+2y | x-3y \rangle$$

Produits scalaires usuels : (à savoir démontrer)

a) Produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$)

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

CORRECTION

ii) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est symétrique ?

Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

On a :

$$\begin{aligned}\langle x | y \rangle &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ &= \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ &= \langle y | x \rangle\end{aligned}$$

iii) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la 1ère place ?

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

M. que $\langle \lambda x + y | z \rangle = \lambda \langle x | z \rangle + \langle y | z \rangle$

Notons $x = (x_1, \dots, x_n)$; $y = (y_1, \dots, y_n)$ et $z = (z_1, \dots, z_n)$.

On a :

$$\langle \lambda x + y | z \rangle = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + y_i) z_i$$

$$= \sum_{i=1}^n (\lambda x_i z_i + y_i z_i)$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^n x_i z_i + \sum_{i=1}^n y_i z_i \quad (\text{linéarité de } \sum)$$

$$= \lambda \langle x | z \rangle + \langle y | z \rangle$$

$$\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_n + y_n)$$

iii) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. M. que $\langle x|x \rangle \geq 0$.

Posez $x = (x_1, \dots, x_n)$.

$$\text{On a } \langle x|x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0.$$

iv) Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

Supposons que $\langle x|x \rangle = 0$, et montrons que $x = 0$.

Posez $x = (x_1, \dots, x_n)$.

$$\text{On a } \langle x|x \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

$$\Rightarrow (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i^2 = 0) \quad \left(\begin{array}{l} \text{Somme nulle de} \\ \text{nombres positifs} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

Conclusion :

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

b) Produit scalaire nouvel sur $C([a,b], \mathbb{R})$

Pour f et $g \in C([a,b], \mathbb{R})$. ($a < b \in \mathbb{R}$).

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) dt.$$

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $C([a,b], \mathbb{R})$.

CORRECTION

i) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est symétrique ?

Soient f et $g \in C([a,b], \mathbb{R})$. On a :

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) dt$$

$$= \int_a^b g(t) f(t) dt$$

$$= \langle g | f \rangle$$

ii) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la 1^{ère} place ?

Soient $f, g, h \in C([a,b], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{M. que } \langle \lambda f + g | h \rangle = \lambda \langle f | h \rangle + \langle g | h \rangle$$

On a :

$$\langle \lambda f + g | h \rangle = \int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) h(t) dt$$

$$= \int_a^b (\lambda f(t) h(t) + g(t) h(t)) dt$$

$$= \lambda \int_a^b f(t)h(t)dt + \int_a^b g(t)h(t)dt \quad \left(\text{linéarité de l'intégrale} \right)$$

$$= \lambda \langle f|h \rangle + \langle g|h \rangle$$

iii) Soit $f \in C([a,b], \mathbb{R})$. M. que $\langle f|f \rangle \geq 0$.

On a :

$$\langle f|f \rangle = \int_a^b f^2(t)dt \geq 0$$

$$\text{car } \forall t \in [a,b], f^2(t) \geq 0$$

iv) Soit $f \in C([a,b], \mathbb{R})$.

Supposons que $\langle f|f \rangle = 0$, et montrons que $f = 0$.

$$\text{On a } \langle f|f \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f^2(t)dt = 0$$

$$\Rightarrow \forall t \in [a,b], f^2(t) = 0 \quad \text{car} \quad \left| \begin{array}{l} f^2 \text{ continue sur } [a,b] \\ f^2 \geq 0 \text{ sur } [a,b] \\ \int_a^b f^2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \forall t \in [a,b], f(t) = 0$$

$$\Rightarrow f = 0$$

Conclusion :

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $C([a,b], \mathbb{R})$.

c) Produit scalaire usuel sur $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π -périodiques.

Pour f et $g \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$$

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

d) Produit scalaire usuel sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\langle X | Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Notez très bien que :

$$\langle X | Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = {}^t X \cdot Y$$

e) Produit scalaire nouvel sur $M_n(\mathbb{R})$

Pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

$$\langle A|B \rangle = \text{tr}({}^t A \cdot B)$$

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

Notez très bien que :

$$\langle A|B \rangle = \text{tr}({}^t A \cdot B) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij} B_{ji}$$

$$\text{où } A = (A_{ij}) \text{ et } B = (B_{ij})$$

CORRECTION

i) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est symétrique ?

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

$$\langle A|B \rangle = \text{tr}({}^t A \cdot B)$$

$$= \text{tr}({}^t ({}^t A \cdot B))$$

$$= \text{tr}({}^t B \cdot {}^t ({}^t A))$$

$$= \text{tr}({}^t B \cdot A)$$

$$= \langle B|A \rangle$$

$$\langle A|B \rangle = \text{tr}({}^t A \cdot B)$$

ii) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la 1^{ère} place ?

Soient $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{M. que } \langle \lambda A + B | C \rangle = \lambda \langle A | C \rangle + \langle B | C \rangle$$

On a :

$$\langle \lambda A + B | C \rangle = \text{tr}({}^t(\lambda A + B) \cdot C)$$

$$= \text{tr}((\lambda {}^tA + {}^tB)C) \quad (\text{linéarité de la transposition})$$

$$= \text{tr}(\lambda {}^tA \cdot C + {}^tB \cdot C)$$

$$= \lambda \text{tr}({}^tA \cdot C) + \text{tr}({}^tB \cdot C) \quad (\text{linéarité de la trace})$$

$$= \lambda \langle A | C \rangle + \langle B | C \rangle$$

$$\langle A | B \rangle = \text{tr}({}^tA \cdot B)$$

iii) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. M. que $\langle A | A \rangle \geq 0$.

$$\langle A | A \rangle = \text{tr}({}^tA \cdot A)$$

$$= \sum_{i=1}^n ({}^tA \cdot A)_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n ({}^tA)_{ij} A_{ji} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A_{ji}^2 \right)$$

$$= \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ji}^2 > 0$$

iv) soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Supposons que $\langle A | A \rangle = 0$, et montrons que $A = 0$.

$$\text{On a } \langle A | A \rangle = 0 \Rightarrow \text{tr}({}^t A \cdot A) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n ({}^t A \cdot A)_{ii} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n ({}^t A)_{ij} A_{ji} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A_{ji}^2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ji}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \forall 1 \leq i, j \leq n, A_{ji}^2 = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Somme nulle de} \\ \text{nombres positifs} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \forall 1 \leq i, j \leq n, A_{ji} = 0$$

$$\Rightarrow A = 0$$

Conclusion :

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

Déf 3

- 1) Un $\mathbb{R}$ -esp vect muni d'un produit scalaire s'appelle espace préhilbertien réel.
- 2) Un espace préhilbertien réel de dimension finie s'appelle espace euclidien.

Par exemple

- 1) $(C([a,b]), \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un esp préhilb réel.
- 2) $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.

Notations et vocabulaire

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilb réel.

- 1) Pour tout $x \in E$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Noter que c'est défini, car $\langle x, x \rangle \geq 0$.

- 2) L'application $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$; $x \mapsto \|x\|$ s'appelle le norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

3) Soient $x, y \in E$.

$\|x - y\|$ se note $d(x, y)$, et s'appelle la distance entre x et y .

Prop 4

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un esp préhilb réel, et $x, y \in E$. On a :

1) $\|x\|^2 = \langle x | x \rangle$

2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

5) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x | y \rangle$

6) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x | y \rangle$

Démo

2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow \langle x | x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x | \lambda x \rangle}$
 $= \sqrt{\lambda^2 \langle x | x \rangle}$
 $= \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\langle x | x \rangle}$
 $= |\lambda| \cdot \|x\|$

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$: Voir plus tard

5) $\|x + y\|^2 = \langle x + y | x + y \rangle$
 $= \langle x | x \rangle + 2\langle x | y \rangle + \langle y | y \rangle$
 $= \|x\|^2 + 2\langle x | y \rangle + \|y\|^2$

6) I dem.

Prop 5

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un esp préhilb réel, et $x, y, z \in E$. On a :

1) $d(x, y) = d(y, x)$

2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire)

Démo

1) $d(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d(y, x)$

2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

3) $d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \underbrace{\|x - z\|}_{d(x, z)} + \underbrace{\|z - y\|}_{d(z, y)}$

Lemme

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Si la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ alors $\Delta \leq 0$; où $\Delta = b^2 - 4ac$.

Démo (En bref)

Raisonnons par l'absurde, et supposons que $\Delta > 0$.

Alors on aurait deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 .
Et par suite, on aura le tableau de signe :

« Supposons par exemple $x_1 < x_2$ »

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	$+sg(a)$	0	$-sg(a)$	$+sg(a)$

Alors $ax^2 + bx + c$ change de signe sur $\mathbb{R}$, ce qui est absurde. □

Prop 6 (L'inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un esp préhilb réel, et $x, y \in E$. On a :

$$1) \langle x|y \rangle^2 \leq \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle \quad (\text{c'est l'ICS})$$

$$2) \langle x|y \rangle^2 = \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle \iff (x, y) \text{ liée}$$

NB :

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit aussi :

$$\langle x|y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

ou encore

$$|\langle x|y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Démo

$$1) \langle x|y \rangle^2 \leq \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle ?$$

On a : $(\forall t \in \mathbb{R}, \|x + ty\|^2 \geq 0)$ (la clé)

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \|x\|^2 + 2\langle x|ty \rangle + \|ty\|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \|y\|^2 t^2 + 2t\langle x|y \rangle + \|x\|^2 \geq 0$$

Pensons à utiliser le lemme.

Cas 1 : Si $\|y\|^2 \neq 0$ (càd $y \neq 0$)

$$\text{Alors } \Delta = (2\langle x|y \rangle)^2 - 4\|y\|^2 \cdot \|x\|^2 \leq 0$$

$$\text{Càd } \langle x|y \rangle^2 \leq \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle \quad \square$$

Cas 2 : Si $\|y\|^2 = 0$ (càd $y = 0$)

$$\text{On a } \begin{cases} \langle x|y \rangle^2 = \langle x|0 \rangle^2 = 0 \\ \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle = \langle x|x \rangle \langle 0|0 \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \langle x|y \rangle^2 = \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle \quad \square$$

2) $\langle x|y \rangle^2 = \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle \iff x \text{ et } y \text{ sont linéaires.}$

($\Leftarrow$)

Supp par exemple $x = \lambda y$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{Alors } \begin{cases} \langle x|y \rangle^2 = \langle \lambda y|y \rangle^2 = \lambda^2 \langle y|y \rangle^2 \\ \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle = \langle \lambda y|\lambda y \rangle \langle y|y \rangle = \lambda^2 \langle y|y \rangle^2 \end{cases}$$

$$\text{D'où } \langle x|y \rangle^2 = \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle \quad \square$$

($\Rightarrow$)

Supp que $\langle x|y \rangle^2 = \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle$, et M que x et y linéaires

Cas 1 : Si $\|y\|^2 \neq 0$ (càd $y \neq 0$)

$$\text{Alors } \Delta = (2\langle x|y \rangle)^2 - 4\|y\|^2 \cdot \|x\|^2 = 0$$

$$\text{D'où l'équation } \|y\|^2 t^2 + 2t\langle x|y \rangle + \|x\|^2 = 0 \text{ d'inconnue } t$$

t admet une unique solution réelle t_0 .

$$\Rightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R}, \|y\|^2 t_0^2 + 2t_0\langle x|y \rangle + \|x\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R}, \|x + t_0 y\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R}, x + t_0 y = 0$$

D'où x et y sont linéaires $\square$

Cas 2 : Si $\|y\|^2 = 0$ (càd $y = 0$)

$y = 0 \Rightarrow (x, y)$ liée ; càd x et y linéaires

Fin démo

$$\langle x|y \rangle^2 \leq \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle \rightarrow \text{IC 5}$$

Par exemple

$$1) \forall f, g \in C([a, b], \mathbb{R}), \left(\int_a^b fg \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \right) \times \left(\int_a^b g^2 \right)$$

$$2) \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \text{ on a :}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \times \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

En particulier :

$$(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$$

Exercices d'applications

Montrer les inégalités suivantes :

$$1) \forall n \geq 1, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$2) \forall f \in C([0, 1], \mathbb{R}), \left(\int_0^1 f \right)^2 \leq \int_0^1 f^2$$

$$3) \text{ Pour tout } f \in C([a, b], \mathbb{R}), \text{ avec } f > 0, \text{ on a :}$$

$$(b-a)^2 \leq \left(\int_a^b f \right) \times \left(\int_a^b \frac{1}{f} \right)$$

Solution

$$1) \forall n \geq 1, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad ?$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \times \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i \times 1 \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \times \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n 1^2 \right)}_{=n}$$

2) $\forall f \in C([0,1], \mathbb{R}), \left(\int_0^1 f \right)^2 \leq \int_0^1 f^2$?

$$\left(\int_0^1 f \right)^2 = \left(\int_0^1 f \times 1 \right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^2 \right) \times \underbrace{\left(\int_0^1 1^2 \right)}_{=1}$$

$$\left(\int_a^b f \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \right) \times \left(\int_a^b 1^2 \right)$$

3) Pour tout $f \in C([a,b], \mathbb{R})$, avec $f > 0$, M. que :

$$(b-a)^2 \leq \left(\int_a^b f \right) \times \left(\int_a^b \frac{1}{f} \right)$$

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b f \right) \times \left(\int_a^b \frac{1}{f} \right) &= \left(\int_a^b (\sqrt{f})^2 \right) \times \left(\int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f}} \right)^2 \right) \\ &\geq \left(\int_a^b \left(\sqrt{f} \times \frac{1}{\sqrt{f}} \right) \right)^2 \\ &= \left(\int_a^b 1 \right)^2 \\ &= (b-a)^2 \end{aligned}$$

$$\left(\int_a^b f \right) \times \left(\int_a^b \frac{1}{f} \right) \geq \left(\int_a^b 1 \right)^2$$

Corollaire 7 (L'inégalité triangulaire)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un esp. préhilb. réel. On a :

$$\forall x, y \in E, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Démo

Faisons un raisonnement par équivalence. On a :

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow (\|x+y\|)^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\|x\|^2} + \cancel{\|y\|^2} + 2\langle x, y \rangle \leq \cancel{\|x\|^2} + \cancel{\|y\|^2} + 2\|x\| \cdot \|y\|$$

$$\Leftrightarrow \langle x|y \rangle \leq \|x\| \|y\|$$

Ce qui est vrai, car :

$$\langle x|y \rangle \leq |\langle x|y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

↳ d'après l'inég de C-Schw



Prop 8

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un esp préhilb réel. Soient $x, y \in E$, on a :

$$1) \quad \langle x|y \rangle = \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

« l'identité de polarisation »

$$2) \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

« l'identité du parallélogramme »

Démo

$$\text{On a } \begin{cases} \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x|y \rangle \Rightarrow 1^o) \\ \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x|y \rangle \end{cases}$$

Par sommation on obtient 2°).



2) Orthogonalité

Dans ce paragraphe, $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ sera un esp préhilbertien réel.

Déf 1

Soient $x, y \in E$.

x et y sont dits **orthogonaux** si et si $\langle x|y \rangle = 0$.

Déf 2

Soient $A \subset E$ et $x \in E$.

x est dit **orthogonal à A** si et si x est orthogonal à tout élément de A .

Notation

$A^\perp$: l'ensemble des vecteurs orthogonaux à A .

$$x \in A^\perp \iff (\forall a \in A, \langle x|a \rangle = 0)$$

par définition

Prop 3

1) i) $\forall x \in E, \langle x|0 \rangle = 0$

ii) $\{0\}^\perp = E$

2) i) $(\forall x \in E, \langle a|x \rangle = 0) \stackrel{S!}{\iff} a = 0$

ii) $E^\perp = \{0\}$

Démo

1) i) $\forall x \in E, \langle x|0 \rangle = 0$?

$$\langle x|0 \rangle = \langle x|0 \cdot 0 \rangle$$

$$= 0 \cdot \langle x|0 \rangle$$

$$= 0$$

ii) $\{0\}^\perp = E$?

"C" évidente

"⊃"

$$\text{On a : } (\forall x \in E, \langle x|0 \rangle = 0)$$

$$\Rightarrow \forall x \in E, x \in \{0\}^\perp$$

$$\Rightarrow E \subset \{0\}^\perp$$

2) i) $(\forall x \in E, \langle a|x \rangle = 0) \iff a = 0$

($\Leftarrow$) (cl. 1) i)

($\Rightarrow$)

Supp que $(\forall x \in E, \langle a|x \rangle = 0)$ et Mqme $a=0$.

En particulier pour $x=a$, on a $\langle a|a \rangle = 0$

D'où $a=0$

Prop 4

Soit $A \subset E$.

$A^\perp$ est un sev de E .

Démo

1) $0 \in A^\perp$ (car $\forall a \in A, \langle 0|a \rangle = 0$)

2) Soient $x, y \in A^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Mqme $(\lambda x + y) \in A^\perp$.

Soit alors $a \in A$. Mqme $\langle \lambda x + y | a \rangle = 0$.

On a :

$$\begin{aligned} \langle \lambda x + y | a \rangle &= \lambda \underbrace{\langle x | a \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y | a \rangle}_{=0 \text{ de même}} = 0 \\ &\downarrow \\ &= 0 \\ &\text{car } x \in A^\perp \text{ et } a \in A \end{aligned}$$

□

Déf 5

Soient F et G deux sev de E .

F et G sont dits **orthogonaux** si et ssi **tout** élément de F est **orthogonal** à **tout** élément de G .

Autrement dit

$$(F \text{ et } G \text{ sont dits orthogonaux}) \Leftrightarrow (\forall x \in F, \forall y \in G, \langle x|y \rangle = 0)$$

Prop 6

Soient F et G deux s.v. de E .

$$1) F \subset G \Rightarrow F^\perp \supset G^\perp$$

2) Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) F et G sont orthogonaux.

$$ii) F \subset G^\perp$$

$$iii) G \subset F^\perp$$

Démo

$$1) F \subset G \Rightarrow F^\perp \supset G^\perp ?$$

Supp que $F \subset G$, et v. que $F^\perp \supset G^\perp$.

Soit alors $x \in G^\perp$. M. que $x \in F^\perp$.

Soit $a \in F$, M. que $\langle x | a \rangle = 0$.

Puis $a \in F$ et $F \subset G$, alors $a \in G$.

$$\text{Ainsi } \begin{cases} a \in G \\ x \in G^\perp \end{cases}$$

$$\text{d'où } \langle x | a \rangle = 0$$

2) On a :

$$i) \Leftrightarrow ii)$$

$$F \text{ et } G \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow \forall x \in F, \forall y \in G, \langle x | y \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in F, x \in G^\perp$$

$$\Leftrightarrow F \subset G^\perp$$

$$ii) \Leftrightarrow iii)$$

$$F \text{ et } G \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow \forall x \in F, \forall y \in G, \langle x | y \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in G, \forall x \in F, \langle x | y \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in G, y \in F^\perp$$

$$\Leftrightarrow G \subset F^\perp$$

□

3) Famille orthogonale

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ sera un esp préhilbertien réel.

Déf 1

Un vecteur x de E est **unitaire** si et ssi $\|x\| = 1$

NB :

- 1) x unitaire $\Rightarrow x \neq 0$
- 2) si $x \neq 0$, alors $\frac{x}{\|x\|}$ est unitaire.

Déf 2

- 1) Une famille de vecteurs de E est dite famille **orthogonale** si et ssi ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux .
- 2) Une famille de vecteurs de E est dite famille **orthonormale** si et ssi elle est **orthogonale** et que tous ses vecteurs sont **Unitaires**.

Prop 3

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E .

- 1) $\mathcal{F}$ est **orthogonale** $\Leftrightarrow (\forall i \neq j, \langle x_i | x_j \rangle = 0)$
- 2) $\mathcal{F}$ est **orthonormale** $\Leftrightarrow (\forall i, j \in [1, p], \langle x_i | x_j \rangle = \delta_{ij})$
 où $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ le symbole de Kronecker.

Démo Claire

Vocabulaire

Une flle orthonormale est dite aussi **orthonormée**.

Prop 4

1) Toute famille orthogonale de vecteurs tous non nuls est libre.

5! 2) Toute famille orthonormale est libre.

Démo :

1) Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une f^{lle} orthogonale telle que ;
 $(\forall i, x_i \neq 0)$.

Alors que $\mathcal{F}$ est libre.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0$.

Alors que : $(\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_k = 0)$.

Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Alors que $\lambda_k = 0$.

$$\text{On a } \left\langle \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \mid x_k \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle x_i \mid x_k \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_k \underbrace{\langle x_k \mid x_k \rangle}_{\neq 0} = 0 \quad (\text{car } \forall i \neq k, \langle x_i \mid x_k \rangle = 0)$$

$\neq 0$
car $x_k \neq 0$

$$\Rightarrow \lambda_k = 0$$

2) Voir de 1)

□

Prop 5

Soient $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p \in \mathbb{R}$.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E . On a :

$$\left\langle \sum_{i=1}^p x_i e_i \mid \sum_{i=1}^p y_i e_i \right\rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq p} x_i y_j \langle e_i \mid e_j \rangle$$



Attention à cette erreur

$$\left\langle \sum_{i=1}^p x_i e_i \mid \sum_{i=1}^p y_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^p x_i y_i \langle e_i \mid e_i \rangle$$

C'est en général **FAUX !!**

Démo

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^p x_i e_i \mid \sum_{i=1}^p y_i e_i \right\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^p x_i e_i \mid \sum_{j=1}^p y_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^p x_i \left\langle e_i \mid \sum_{j=1}^p y_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^p x_i \left(\sum_{j=1}^p y_j \langle e_i \mid e_j \rangle \right) \\ &= \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^p x_i y_j \langle e_i \mid e_j \rangle \right) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq p} x_i y_j \langle e_i \mid e_j \rangle \end{aligned}$$



Prop 6

$\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E .

Soient $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^p y_i e_i$ deux vecteurs de E .

1) Si $\mathcal{F}$ est **orthogonale**, on a :

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^p x_i y_i \langle e_i \mid e_i \rangle = \sum_{i=1}^p x_i y_i \|e_i\|^2$$

2) Si $\mathcal{F}$ est **orthonormale**, on a :

Si i) $\langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^p x_i y_i$

$$ii) \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Démo vient de la prop 5.

Vocabulaire

Si une base de E est une famille orthogonale, on dit tout court qu'elle est une **base orthogonale** (bon).

On l'appelle aussi **base orthonormée**.

Prop 7

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une **bon** de E .

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle e_i$$

Autrement dit

$$\text{Si } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \text{ alors } (\forall i, x_i = \langle x | e_i \rangle)$$

Démo :

$$\text{Supp } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

$$\forall 1 \leq k \leq n, \langle x | e_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i \middle| e_k \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i | e_k \rangle$$

$$= x_k \langle e_k | e_k \rangle$$

$$= x_k$$

$$(\forall i \neq k, \langle e_i | e_k \rangle = 0)$$

$$\langle e_k | e_k \rangle = \|e_k\|^2 = 1$$



Prop 8 (Théorème de Pythagore)

1) Soient $x, y \in E$, on a :

$$(x \text{ et } y \text{ orthogonaux}) \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

2) Soit $n \geq 2$,

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ famille orthogonale} \Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

Démo

$$\begin{aligned} 1) \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x|y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 \\ &\Leftrightarrow \langle x|y \rangle = 0. \end{aligned}$$

2) Par récurrence sur $n \geq 2$.

Initialisation :

Pour $n=2$; c'est 1°)

Hérédité

Soit $n \geq 2$.

Supp. que la proposition est vraie pour n , et montrons qu'elle est vraie pour $(n+1)$.

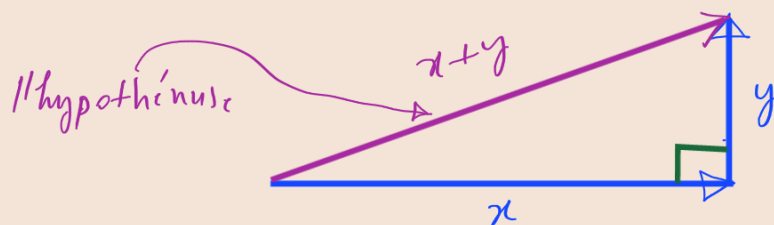
Soit alors $(x_1, \dots, x_{n+1})$ une f^{lle} orthogonale, et m. fme.

$$\left\| \sum_{i=1}^{n+1} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \|x_i\|^2$$

On a :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{n+1} x_i \right\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i + x_{n+1} \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{d'après 1°), et que } x_{n+1} \\ \text{et } \sum_{i=1}^n x_i \text{ sont orthogonaux} \end{array} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 \quad (\text{l'hypothèse de réc.}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \|x_i\|^2 \end{aligned}$$

Schéma



ça rappelle le thm de Pythagore vu au collège.

Attention

Dans 2), la réciproque est en général fautive pour $n \neq 3$.

Contre-exemple :

$E = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel.

$x = (1, 0)$; $y = (-1, 1)$; $z = (1, 1)$.

On a $\|x+y+z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 = 5$ (faites vos calculs)

et pourtant la famille (x, y, z) n'est pas orthogonale

$$\text{car } \langle x, y \rangle = -1 \neq 0$$

4) Procédure d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Prop 1

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E . On a :

$$x \in \left(\text{vect}(e_1, \dots, e_p) \right)^\perp \Leftrightarrow (\forall 1 \leq i \leq p, \langle x, e_i \rangle = 0)$$

Démo

$(\Rightarrow)$

Clair, car $e_i \in \text{vect}(e_1, \dots, e_p)$

$(\Leftarrow)$

Supp que : $(\forall 1 \leq i \leq p, \langle x, e_i \rangle = 0)$.

Alors $x \in \left(\text{vect}(e_1, \dots, e_p) \right)^\perp$.

Soit $y \in \text{vect}(e_1, \dots, e_p)$. Alors $\langle x, y \rangle = 0$

On a $y = \sum_{i=1}^p d_i e_i$, où $d_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$.

Alors :

$$\begin{aligned} \langle x | y \rangle &= \langle x | \sum_{i=1}^p d_i e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^p d_i \underbrace{\langle x | e_i \rangle}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Lemme

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille **orthonormale**.

Soit $x \in E$. On a :

$$\left(x - \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle e_i \right) \in \left(\text{vect}(e_1, \dots, e_p) \right)^\perp$$

Démo

Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Il que

$$\left\langle x - \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle e_i \mid e_k \right\rangle = 0$$

On a :

$$= \langle x | e_k \rangle \text{ car } (e_i) \text{ est } \underline{\text{orthonormale}}$$

$$\begin{aligned} \left\langle x - \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle e_i \mid e_k \right\rangle &= \langle x | e_k \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle e_i \mid e_k \right\rangle \\ &= \langle x | e_k \rangle - \langle x | e_k \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Ce lemme permet de montrer le principe d'orthonormalisation de Gram-Schmidt suivant :

Prop 2 (Principe d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ une famille libre de E .

A) Il existe une unique famille orthogonale $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ vérifiant :

$$\star \forall 1 \leq i \leq p, \text{vect}(x_1, \dots, x_i) = \text{vect}(e_1, \dots, e_i)$$

$$\star \forall 1 \leq i \leq p, \langle x_i | e_i \rangle > 0$$

B) Cette famille orthogonale $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ s'obtient par le procédé de Gram-Schmidt suivant : (Procédé à retenir !)

étape 1 $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$

étape 2
$$\begin{cases} u_2 = x_2 - \langle x_2 | e_1 \rangle e_1 \\ e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} \end{cases}$$

étape 3
$$\begin{cases} u_3 = x_3 - (\langle x_3 | e_1 \rangle e_1 + \langle x_3 | e_2 \rangle e_2) \\ e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} \end{cases}$$

⋮

étape p
$$\begin{cases} u_p = x_p - (\langle x_p | e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x_p | e_{p-1} \rangle e_{p-1}) \\ e_p = \frac{u_p}{\|u_p\|} \end{cases}$$

Corollaire 3

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une **base** de E (E étant esp euclid de dim n),
 Alors la famille $(e_1, \dots, e_n)$ construite via le procédé de Gram-Schmidt,
 est une **bon** de E .

Démo

On a $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille **orthonormée** (c'est G-Sch).

Donc $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille **libre** de E .

$$\text{Or } \text{card}(e_1, \dots, e_n) = n = \dim(E)$$

Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une **base** de E .

Étant une f^{lle} orthonormale, $(e_1, \dots, e_n)$ est donc une **bon** de E .

Corollaire 4 (Existence d'une **bon** dans un esp euclidien)

Tout espace euclidien possède au moins une **bon**.

Démo

Vient du Corollaire 3.

Exercice:

$E = \mathbb{R}_2[x]$ est muni du produit scalaire usuel :

$$\langle P|Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt.$$

1) $(1, X)$ est-elle une **bon** de E ?

2) Construire une **bon** de E .

Solution

1) $(1, X)$ est-elle une **bon** de E ?

$$\text{Non, car } \langle 1|X \rangle = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \neq 0$$

2) Construire une bon de E .

On construit (E_1, E_2) via le procédé de Gram-Sch à partir de la base $(1, X)$. Ça sera une bon de E .

$$E_1 = \frac{1}{\|1\|} \quad ; \quad \|1\| = 1$$

$$E_1 = 1$$

$$\langle P|Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

$$\|P\| = \left(\int_0^1 P^2(t)dt \right)^{1/2}$$

$$E_2 = ?$$

$$U_2 = X - \langle X|E_1 \rangle \cdot E_1$$

$$\langle X|E_1 \rangle = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } U_2 = X - \frac{1}{2}$$

$$\|U_2\| = \sqrt{\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt} = \sqrt{\left[\frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)^3}{3}\right]_0^1} = \sqrt{\frac{1}{3 \times 4}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{U_2}{\|U_2\|} = \sqrt{3} \left(2X - 1\right)$$

(E_1, E_2) est une bon de $E = \mathbb{R}_2[X]$, où :

$$\begin{cases} E_1 = 1 \\ E_2 = \sqrt{3} (2X - 1) \end{cases}$$

Corollaire 5

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est préhilbertien réel.

Tout seu de dimension finie de E possède une bon.

Prop 6

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ esp préhilbertien réel et F sev de dimension finie de E . On a :

$$E = F \oplus F^\perp$$

Démo

1) $F \cap F^\perp = \{0\}$?

Soit $x \in F \cap F^\perp$. Alors $x = 0$.

$$\text{On a } x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall a \in F, \langle x | a \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle x | x \rangle = 0 \text{ (en posant } a = x \in F)$$

$$\Rightarrow x = 0$$

2) Soit $x \in E$.

Il existe $u_1 \in F$ et $u_2 \in F^\perp$ tels que $x = u_1 + u_2$.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F .

$$\text{On a } \left(x - \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle e_i \right) \in \left(\text{vect}(e_1, \dots, e_p) \right)^\perp$$

D'autre part, on a :

$$x = \underbrace{\left(x - \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle e_i \right)}_{\in F^\perp} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle e_i \right)}_{\in F}$$

□

Notation

Soient E un espace préhilbertien et F un sev de E .

$(F^\perp)^\perp$ se notera $F^{\perp\perp}$.

Prop 7

Soient E un espace euclidien de dim n et F un sev de E . On a :

$$1) \dim(F^\perp) = n - \dim(F)$$

$$2) F^{\perp\perp} = F$$

Démo

$$1) \dim(F^\perp) = n - \dim(F) ?$$

$$\text{On a } E = F \oplus F^\perp \text{ alors } \underbrace{\dim(E)}_{=n} = \dim(F) + \dim(F^\perp)$$

$$2) F^{\perp\perp} = F ?$$

$$\text{On a } x \in F^{\perp\perp} \Leftrightarrow (\forall a \in F^\perp, \langle x | a \rangle = 0)$$

$$\text{D'où } (\forall x \in F, x \in F^{\perp\perp})$$

$$\text{Càd } F \subset F^{\perp\perp}.$$

$$\text{D'autre part, on a } \dim(F^{\perp\perp}) = n - \dim(F^\perp) = \dim F$$

$$\text{D'où } F^{\perp\perp} = F$$



Prop 8

E est euclidien.

$$1) \text{ Supp que } E = F \oplus F^\perp$$

Si B_1 bon de F et B_2 bon de $F^\perp$

Alors $B_1 \cup B_2$ est une bon de E .

Elle est dite bon adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$

$$2) \text{ En général, supp que } E = \bigoplus_{i=1}^p F_i, \text{ où les } F_i \text{ sont deux à deux orthogonaux.}$$

Si $B_1, \dots, B_p$ des **bon** respectives de $F_1, \dots, F_p$

Alors $\bigcup_{i=1}^p B_i$ est un **bon** de E .

elle est dite **bon adaptée** à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$

Démo

1) Supp que $E = F \oplus F^\perp$
 B_1 **bon** de F et B_2 **bon** de $F^\perp$

Al que $B_1 \cup B_2$ est un **bon** de E .

i) $B_1 \cup B_2$ est un **bale** de E (bale adaptée) (clair)

ii) Tous les vecteurs de $B_1 \cup B_2$ sont unitaires, car B_1 et B_2 des **bon**.

iii) Si u et v deux vecteurs distincts de $B_1 \cup B_2$, alors $\langle u | v \rangle = 0$; En effet :

→ si u et v appartiennent tous les deux à B_1 ou à B_2 :

Alors c'est fini, car B_1 et B_2 **bon**.

→ Si u et v , l'un dans B_1 et l'autre dans B_2 :

On aura l'un dans F et l'autre dans $F^\perp$.
 D'où ils seront orthogonaux □

Prop 9 (Théorème de la bale orthoormée incomplète)

E esp euclidien de dimension finie $n \geq 1$.

Si $(E_1, \dots, E_p)$ est une **famille orthoormée** de E , alors il existe

$\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n \in E$ tels que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n)$ soit une bon de E .

Démo

$$\text{On a } E = \text{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \oplus \left(\text{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \right)^\perp$$

On a $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une bon de $\text{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$.

Soit $(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n)$ une bon de $\left(\text{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \right)^\perp$.

Alors $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \cup (\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n)$ est une bon de E . □

5) Projection orthogonale sur un soc de dimension finie

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est encore un esp préhilbertien réel.

Déf 1

Soit F un soc de dim finie de E .

On sait que $E = F \oplus F^\perp$.

La projection sur F parallèlement à $F^\perp$ s'appelle la projection orthogonale sur F .

Prop 2

Soient F un soc de dim finie de E , et $(e_1, \dots, e_p)$ une bon de F .

On a :

$$\forall x \in E, P_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle e_i$$

où $P_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F .

Démo

On avait vu que :

$$x = \underbrace{\left(x - \sum_{i=2}^p \langle x | e_i \rangle e_i\right)}_{\in F^\perp} + \underbrace{\left(\sum_{i=2}^p \langle x | e_i \rangle e_i\right)}_{\in F}$$

$$\text{Donc } P_F(x) = \sum_{i=2}^p \langle x | e_i \rangle e_i$$

□

Exercice d'application

Reconsidérons l'espace euclidien $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire usuel

$$\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P Q$$

Déterminer la projection orthogonale de X^2 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution

(E_1, E_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, où :

On rappelle que :

$$\begin{cases} E_1 = 1 \\ E_2 = \sqrt{3}(2X-1) \end{cases}$$

$$P(X^2)_{\mathbb{R}_2[X]} = \langle X^2 | E_1 \rangle \cdot E_1 + \langle X^2 | E_2 \rangle \cdot E_2$$

$$\langle X^2 | E_1 \rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

$$\langle X^2 | E_2 \rangle = \sqrt{3} \cdot \int_0^1 t^2 (2t-1) dt = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$P(X^2)_{\mathbb{R}_2[X]} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \sqrt{3} (2X-1)$$

$$P(X^2)_{\mathbb{R}_2[X]} = X - \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} \langle P | Q \rangle &= \int_0^1 P(t) Q(t) dt \\ \|P\| &= \left(\int_0^1 P^2(t) dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Prop 3 (Inégalité de Bessel)

Soit F un s.e.v. de dim finie de E . On a :

$$\forall x \in E, \|P_F(x)\| \leq \|x\|$$

Démo

$$\text{On a } x = \underbrace{P_F(x)}_{\in F} + \underbrace{(x - P_F(x))}_{\in F^\perp}$$

$$\Rightarrow \|x\|^2 = \|P_F(x) + (x - P_F(x))\|^2$$

$$= \|P_F(x)\|^2 + \underbrace{\|x - P_F(x)\|_F^2}_{=0} \quad \left(\text{via Pythagore, car } P_F(x) \text{ et } (x - P_F(x)) \text{ sont orthogonaux} \right)$$

$$\geq \|P_F(x)\|^2$$

□

Corollaire 4

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien.

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille **orthonormale** de E .

Pour tout $x \in E$, la série positive $\sum_{n \geq 0} \langle x, e_n \rangle^2$ converge

et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

Il suffit de montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $F = \text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$.

On a $\|P_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$ (d'après Prop 3)

$$\text{Et on a } P_F(x) = \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle e_k \text{ (car } (e_0, \dots, e_n) \text{ est une base de } F).$$

est une base de F .

$$\text{D'où } \|P_F(x)\|^2 = \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle^2.$$

L'inégalité $\|P_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$ devient :

$$\sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

La suite des sommes partielles de la série à

termes positifs $\sum_{n \geq 0} \langle x, e_n \rangle^2$ est majorée, alors

la série converge.

Par passage à la limite ($n \rightarrow +\infty$) dans

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

on tire que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

□

Prop 5

Soit F un sev de dim finie de E .

Soient $x, a \in E$, on a :

$$P_F(x) = a \iff \begin{cases} a \in F \\ (x-a) \in F^\perp \end{cases}$$

Démo

($\Rightarrow$)

$$\text{Clair vu que } \begin{cases} P_F(x) \in F \\ x - P_F(x) \in F^\perp \end{cases}$$

($\Leftarrow$)

Supp que $a \in F$ et $(x-a) \in F^\perp$. Alors $P_F(x) = a$.

$$\text{On a } x = \underbrace{a}_{\in F} + \underbrace{(x-a)}_{\in F^\perp} \xrightarrow{\text{par déf}} P_F(x) = a$$

□

Exercice d'application

Reconsidérons l'espace préhilbertien $E = \mathbb{R}[x]$ muni du produit scalaire usuel $\langle P|Q \rangle = \int_0^1 P Q$.

Déterminer la projection orthogonale de x^2 sur $\mathbb{R}_1[x]$ en vous servant de la prop 4.

Solution

$$\text{Notons } P(x^2) = A.$$

$$\mathbb{R}_1[x]$$

$$\text{On a } \begin{cases} A \in \mathbb{R}_1[x] \\ (x^2 - A) \in (\mathbb{R}_1[x])^\perp \end{cases}$$

$$P_F(x) = a \Leftrightarrow \begin{cases} a \in F \\ (x-a) \in F^\perp \end{cases}$$

Rappel

$$\text{On a } A = \alpha + \beta x, \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ (qu'on détermine)}. \quad \text{On a } A = \alpha + \beta x, \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ (qu'on détermine)}.$$

$$(x^2 - A) \in (\mathbb{R}_1[x])^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \langle x^2 - \alpha - \beta x | 1 \rangle = 0 \\ \langle x^2 - \alpha - \beta x | x \rangle = 0 \end{cases} \quad (\text{car } (1, x) \text{ base de } \mathbb{R}_1[x])$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^1 (x^2 - \alpha - \beta x) dx = 0 \\ \int_0^1 (x^3 - \alpha x - \beta x^2) dx = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} = 1 \times \alpha + \frac{1}{2} \times \beta \\ \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \alpha + \frac{1}{3} \times \beta \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{système d'inconnues} \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ à résoudre} \end{array} \right)$$

$$\text{On trouve : } \alpha = -\frac{1}{6} \text{ et } \beta = 1$$

Enfin :

$$P(x^2) = x - \frac{1}{6}$$

$$A = \alpha + \beta x$$



6) Distance d'un vecteur à un sev de dimension finie.

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est encore un esp préhilbertien réel.

Déf 1

Soit F un sev de dim finie de E . Soit $x \in E$.

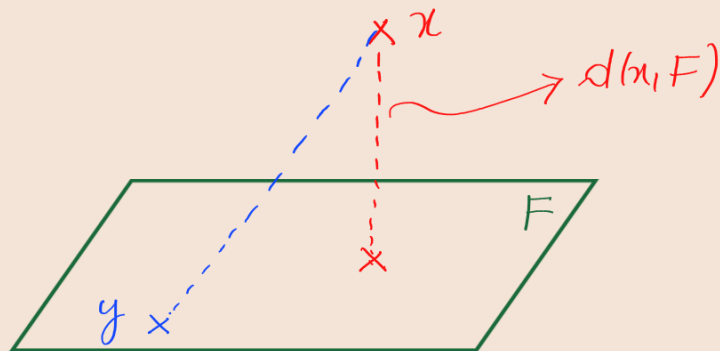
La distance de x à F est :

$$d(x, F) = \inf(\{d(x, y) / y \in F\})$$

Calc

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} (\|x - y\|)$$

Schéma



Prop 2

Soit F un sev de dim finie de E . Soit $x \in E$.

1) $d(x, F) = d(x, P_F(x)) (= \|x - P_F(x)\|)$

2) $P_F(x)$ est l'unique vecteur y de F vérifiant $d(x, F) = \|x - y\|$.

3) $d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$

1) $d(x, F) = d(x, P_F(x))$?

Il s'agit de montrer que $\inf_{y \in F} (\|x - y\|) = \|x - P_F(x)\|$.

Or $P_F(x) \in F$, alors $\|x - P_F(x)\| \in \{\|x - y\| / y \in F\}$

Rappel

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

Supp que $a \in A$.

$\inf(A) = a \iff a$ est un **minorant**

Dans ce cas, $\{a = \min(A)\}$

Ainsi, il suffit de montrer que:

$$\forall y \in F, \|x - y\| \geq \|x - P_F(x)\|$$

Soit alors $y \in F$. On a:

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \left\| \underbrace{(x - P_F(x))}_{\in F^\perp} + \underbrace{(P_F(x) - y)}_{\in F} \right\|^2 \\ &= \|x - P_F(x)\|^2 + \|P_F(x) - y\|^2 \quad (\text{Pythagore}) \\ &\geq \|x - P_F(x)\|^2 \end{aligned}$$

2) $P_F(x)$ est l'unique vecteur y de F vérifiant $d(x, F) = \|x - y\|$?

Soit $y_0 \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - y_0\|$. All que $y_0 = P_F(x)$.

On a:

$$\begin{aligned} \underbrace{\|x - y_0\|}_{= d(x, F)}^2 &= \left\| \underbrace{(x - P_F(x))}_{\in F^\perp} + \underbrace{(P_F(x) - y_0)}_{\in F} \right\|^2 \\ &= \|x - P_F(x)\|^2 + \|P_F(x) - y_0\|^2 \quad (\text{Pythagore}) \\ &= \underbrace{d(x, F)}^2 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \|p_F(x) - y_0\|^2 = 0$$

$$\text{Càd } y_0 = p_F(x)$$

$$3) d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F?$$

$$d(x, F) = 0 \Leftrightarrow \|x - p_F(x)\| = 0$$

$$\Leftrightarrow p_F(x) = x$$

$$\Leftrightarrow x \in F$$

NB

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \inf_{y \in F} (\|x - y\|) = \min_{y \in F} (\|x - y\|)$$

Exercice d'application 1

Reconsidérons l'espace préhilbertien $E = \mathbb{R}[x]$ muni du produit

$$\text{scalaire usuel } \langle P | Q \rangle = \int_0^1 P Q.$$

$$\text{Calculer } d(x^2, \mathbb{R}_1[x]).$$

Solution

$$d(x^2, \mathbb{R}_1[x]) = d(x^2, p_{\mathbb{R}_1[x]}(x^2))$$

$$= \|x^2 - p_{\mathbb{R}_1[x]}(x^2)\|$$

$$= \|x^2 - x + \frac{1}{6}\|$$

$$= \sqrt{\int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6})^2 dx} = ?$$

$$p_{\mathbb{R}_1[x]}(x^2) = x - \frac{1}{6}$$

$$\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) dt$$

$$\|P\| = \sqrt{\langle P | P \rangle} = \sqrt{\int_0^1 P^2(t) dt}$$

Exercice d'application 2

Calculer :

$$1) \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx \right) \quad \left(\text{ou } \min_{a,b \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx \right) \right)$$

$$2) \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 (x^2 + ax + b)^2 dx \right)$$

$$3) \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 (e^x + ax + b)^2 dx \right)$$

$$4) \inf_{a,b,c \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 dx \right)$$

Solution

$$1) \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx \right) = ?$$

Clé

$$\int_0^1 (P(t))^2 dt = \langle P|P \rangle = \|P\|^2; \quad \langle P|Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

$$\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx \right) = \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \left(\|X^2 - aX - b\|^2 \right)$$

$$= \left(\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \|X^2 - aX - b\| \right)^2$$

$$= \left(\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \|X^2 - (aX + b)\| \right)^2$$

$$= \left(\inf_{P \in \mathbb{R}_2[x]} \|X^2 - P\| \right)^2$$

$$= \left(d(X^2, \mathbb{R}_2[x]) \right)^2$$

$$= \left(\|X^2 - P(X^2)\|_{\mathbb{R}_2[x]} \right)^2$$

$$= \left(\|X^2 - \left(X - \frac{1}{6}\right)\| \right)^2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{approx} \\ \text{calculs} \end{array} \right)$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx$$

$$= \boxed{?}$$

$$2) \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 (x^2 + ax + b)^2 dx \right) = \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx \right)$$

...

$$3) \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 (e^x + ax + b)^2 dx \right) = \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 (e^x - ax - b)^2 dx \right)$$

$$= \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \left(\|e^x - aX - b\|^2 \right)$$

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

$$= \left(\inf_{a, b \in \mathbb{R}} \|e^x - aX - b\| \right)^2$$

$$= \left(\inf_{a, b \in \mathbb{R}} \|e^x - (aX + b)\| \right)^2$$

$$= \left(\inf_{P \in \mathbb{R}_1[X]} \|e^x - P\| \right)^2$$

$$= \left(d(e^x, \mathbb{R}_1[X]) \right)^2$$

$$= \left(\|e^x - P(e^x)_{\mathbb{R}_1[X]}\| \right)^2$$

□



Fin