

# Fonctions vectorielles d'une variable vectorielle

## Limites

### Exercice 1 [01735] [Correction]

Étudier les limites en  $(0, 0)$  des fonctions suivantes :

- $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
- $f(x, y) = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$
- $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$
- $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

### Exercice 2 [01736] [Correction]

Étudier les limites en  $(0, 0)$  des fonctions suivantes :

- $f(x, y) = \frac{x^3}{y}$
- $f(x, y) = \frac{x+2y}{x^2-y^2}$
- $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$

### Exercice 3 [00478] [Correction]

Étudier les limites en  $(0, 0)$  des fonctions suivantes :

- $f(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
- $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$
- $f(x, y) = \frac{xy}{x^4+y^4}$
- $f(x, y) = \frac{xy}{x-y}$

### Exercice 4 [00068] [Correction]

Étudier les limites en  $(0, 0)$  des fonctions suivantes :

- $f(x, y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $f(x, y) = \frac{1-\cos(xy)}{xy^2}$
- $f(x, y) = x^y = e^{y \ln x}$
- $f(x, y) = \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}{x+y}$

### Exercice 5 [00480] [Correction]

Soit  $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = x^y$  pour  $x > 0$  et  $f(0, y) = 0$ .

- Montrer que  $f$  est une fonction continue.
- Est-il possible de la prolonger en une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$  ?

### Exercice 6 [01737] [Correction]

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$F(x, y) = \frac{f(x^2 + y^2) - f(0)}{x^2 + y^2}$$

Déterminer  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$ .

## Continuité

### Exercice 7 [01738] [Correction]

Soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est continue.

### Exercice 8 [01739] [Correction]

Soient  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } y \neq x \\ f'(x) & \text{si } y = x \end{cases}$$

Montrer que la fonction  $F$  est continue.

### Exercice 9 [00481] [Correction]

Soient  $E$  un espace vectoriel normé et  $A$  une partie non vide de  $E$ .

Pour  $x \in E$ , on pose

$$d(x, A) = \inf \{\|x - a\| \mid a \in A\}$$

Montrer que l'application  $x \mapsto d(x, A)$  est définie et continue sur  $E$ .

**Exercice 10** [01741] [Correction]

Soit  $A$  une partie convexe non vide de  $\mathbb{R}^2$  et  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Soit  $a$  et  $b$  deux points de  $A$  et  $y$  un réel tels que  $f(a) \leq y \leq f(b)$ . Montrer qu'il existe  $x \in A$  tel que  $f(x) = y$ .

**Exercice 11** [00482] [Correction]

Soient  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R > 0$ .

- Montrer qu'il existe deux points  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{C}$  diamétralement opposés tels que  $g(A) = g(B)$ .
- Montrer qu'il existe deux points  $C$  et  $D$  de  $\mathcal{C}$ , se déduisant l'un de l'autre par un quart de tour tels que  $g(C) = g(D)$ .

**Exercice 12** [01112] [Correction]

Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux parties fermées d'un espace vectoriel normé  $E$  telles que

$$E = E_1 \cup E_2$$

Montrer qu'une application  $f: E \rightarrow F$  est continue si, et seulement si, ses restrictions  $f_1$  et  $f_2$  au départ de  $E_1$  et de  $E_2$  le sont.

## Lipchitzianité

**Exercice 13** [01734] [Correction]

Soient  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}^2$  et  $x$  un point de  $\mathbb{R}^2$ . On note

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

Montrer que l'application  $d: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est lipschitzienne.

**Exercice 14** [00475] [Correction]

Soit  $E$  l'espace formé des fonctions réelles définies sur  $[a; b]$ , lipschitziennes et s'annulant en  $a$ .

Montrer que l'application  $N: E \rightarrow \mathbb{R}$  qui à  $f \in E$  associe le réel

$$N(f) = \inf \{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x, y \in [a; b], |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|\}$$

définit une norme sur  $E$ .

**Exercice 15** [03052] [Correction]

Soient  $A$  une partie bornée non vide d'un espace vectoriel normé  $(E, N)$  et  $\mathcal{L}$  le sous-espace vectoriel des applications lipschitziennes de  $A$  dans  $E$ .

- Montrer que les éléments  $\mathcal{L}$  sont des fonctions bornées.
- Pour  $f \in \mathcal{L}$ , soit

$$K_f = \{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall (x, y) \in A^2, N(f(x) - f(y)) \leq kN(x - y)\}$$

Justifier l'existence de  $c(f) = \inf K_f$  puis montrer  $c(f) \in K_f$ .

- Soient  $a \in A$  et  $N_a: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par

$$N_a(f) = c(f) + N(f(a))$$

Montrer que  $N_a$  est une norme sur  $\mathcal{L}$ .

- Soient  $a, b \in A$ . Montrer que les normes  $N_a$  et  $N_b$  sont équivalentes.

**Exercice 16** [00476] [Correction]

Soient  $E$  un espace vectoriel normé et  $T: E \rightarrow E$  définie par

$$T(u) = \begin{cases} u & \text{si } \|u\| \leq 1 \\ \frac{u}{\|u\|} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $T$  est au moins 2-lipschitzienne.

**Exercice 17** [00477] [Correction]

Soit  $E$  un espace vectoriel réel normé. On pose

$$f(x) = \frac{1}{\max(1, \|x\|)} x$$

Montrer que  $f$  est 2-lipschitzienne.

Montrer que si la norme sur  $E$  est hilbertienne alors  $f$  est 1-lipschitzienne.

## Continuité et linéarité

**Exercice 18** [00485] [Correction]

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

On suppose que pour toute suite  $(u_n)$  tendant vers  $0_E$ , la suite  $(f(u_n))$  est bornée. Montrer que la fonction  $f$  est continue.

**Exercice 19** [00486] [Correction]

Montrer que  $N_1$  et  $N_2$  normes sur  $E$  sont équivalentes si, et seulement si,  $\text{Id}_E$  est bicontinue de  $(E, N_1)$  vers  $(E, N_2)$ .

**Exercice 20** [02832] [Correction]

Soient  $d$  un entier naturel et  $(f_n)$  une suite de fonctions polynomiales de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de degré au plus  $d$ . On suppose que cette suite converge simplement.

Montrer que la limite est polynomiale de degré au plus  $d$ , la convergence étant de plus uniforme sur tout segment.

**Exercice 21** [03282] [Correction]

Soient  $E$  un espace normé de dimension finie et  $u$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|$$

Montrer que les espaces  $\ker(u - \text{Id}_E)$  et  $\text{Im}(u - \text{Id}_E)$  sont supplémentaires.

**Exercice 22** [03717] [Correction]

$E$  désigne un espace vectoriel normé par  $N$ .

Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

On suppose

$$\forall x \in E, N((p - q)(x)) < N(x)$$

Montrer que  $p$  et  $q$  sont de même rang.

**Exercice 23** [03786] [Correction]

On munit  $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  de la norme

$$\|M\| = \max_{1 \leq i, j \leq p} |m_{i,j}|$$

a) Soient  $X$  fixé dans  $\mathbb{C}^p$  et  $P$  fixé dans  $\text{GL}_p(\mathbb{C})$ ; montrer que

$$\phi(M) = MX \text{ et } \psi(M) = P^{-1}MP$$

définissent des applications continues.

b) Montrer que

$$f(M, N) = MN$$

défini une application continue.

c) Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  telle que la suite  $(\|A^n\|)$  soit bornée; montrer que les valeurs propres de  $A$  sont de module inférieur à 1.

d) Soit  $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  telle que la suite  $(B^n)$  tende vers une matrice  $C$ . Montrer que  $C^2 = C$ ; que conclure à propos du spectre de  $C$ ?

Montrer que les valeurs propres de  $B$  sont de module au plus égal à 1

**Exercice 24** [01012] [Correction]

Pour  $a = (a_n) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$  et  $u = (u_n) \in \ell^1(\mathbb{R})$ , on pose

$$\langle a, u \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n$$

a) Justifier l'existence de  $\langle a, u \rangle$ .

b) Montrer que l'application linéaire  $\varphi_u: a \mapsto \langle a, u \rangle$  est continue.

c) Même question avec  $\psi_a: u \mapsto \langle a, u \rangle$ .

**Exercice 25** [03907] [Correction]

On note  $E = \ell^\infty(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel normé des suites réelles bornées muni de la norme  $N_\infty$ . Pour  $u = (u_n) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$  on pose  $T(u)$  et  $\Delta(u)$  les suites définies par

$$T(u)_n = u_{n+1} \text{ et } \Delta(u)_n = u_{n+1} - u_n$$

Montrer que les applications  $T$  et  $\Delta$  sont des endomorphismes continus de  $E$ .

**Exercice 26** [03908] [Correction]

Soit  $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$  muni de  $\|\cdot\|_\infty$  définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{[0;1]} |f|$$

Étudier la continuité de la forme linéaire  $\varphi: f \mapsto f(1) - f(0)$ .

**Exercice 27** [03909] [Correction]

Soient  $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$  et  $F = \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$ . On définit  $N_1$  et  $N_2$  par

$$N_1(f) = \|f\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

On définit  $T: E \rightarrow F$  par : pour tout  $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $T(f): [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Montrer que  $T$  est une application linéaire continue.

**Exercice 28** [ 03910 ] [Correction]

On munit l'espace  $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$  de la norme  $\|\cdot\|_2$ . Pour  $f$  et  $\varphi$  éléments de  $E$  on pose

$$T_\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t) dt$$

Montrer que  $T_\varphi$  est une forme linéaire continue.

**Exercice 29** [ 03911 ] [Correction]

Soit  $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$  muni de  $\|\cdot\|_1$  définie par

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$$

Étudier la continuité de la forme linéaire

$$\varphi: f \mapsto \int_0^1 tf(t) dt$$

**Exercice 30** [ 03912 ] [Correction]

Sur  $\mathbb{R}[X]$  on définit  $N_1$  et  $N_2$  par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t)|$$

- a) Montrer que  $N_1$  et  $N_2$  sont deux normes sur  $\mathbb{R}[X]$ .
- b) Montrer que la dérivation est continue pour  $N_1$ .
- c) Montrer que la dérivation n'est pas continue pour  $N_2$ .
- d)  $N_1$  et  $N_2$  sont-elles équivalentes ?

**Exercice 31** [ 03913 ] [Correction]

Soit  $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$  muni de  $\|\cdot\|_\infty$ .

Montrons que l'application  $u: f \mapsto u(f)$  où  $u(f)(x) = f(0) + x(f(1) - f(0))$  est un endomorphisme continu de  $E$ .

**Exercice 32** [ 03914 ] [Correction]

Pour  $a = (a_n) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$  et  $u = (u_n) \in \ell^1(\mathbb{R})$ , on pose

$$\langle a, u \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n$$

a) Justifier l'existence de  $\langle a, u \rangle$ .

b) Montrer que l'application linéaire  $\varphi_u: a \mapsto \langle a, u \rangle$  est continue.

c) Même question avec  $\psi_a: u \mapsto \langle a, u \rangle$ .

**Exercice 33** [ 02741 ] [Correction]

Soit  $K \in \mathcal{C}([0; 1]^2, \mathbb{R})$  non nulle telle que

$$\forall (x, y) \in [0; 1]^2, K(x, y) = K(y, x)$$

On note  $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ . Pour  $f \in E$ , soit

$$\Phi(f): x \in [0; 1] \rightarrow \int_0^1 K(x, y)f(y) dy \in \mathbb{R}$$

a) Vérifier que  $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ .

b) L'application  $\Phi$  est-elle continue pour  $\|\cdot\|_\infty$  ? pour  $\|\cdot\|_1$  ?

c) Montrer que

$$\forall f, g \in E, (\Phi(f) | g) = (f | \Phi(g))$$

Soit

$$\Omega = \left( \max_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 |K(x, y)| dy \right)^{-1}$$

d) Montrer

$$\forall \lambda \in ]-\Omega; \Omega[, \forall h \in E, \exists ! f \in E, h = f - \lambda \Phi(f)$$

e) Si  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , montrer que :

$$\dim \ker(\Phi - \lambda \text{Id}) \leq \frac{1}{\lambda^2} \iint_{[0; 1]^2} K(x, y)^2 dx dy$$

## Connexité par arcs

**Exercice 34** [ 01147 ] [Correction]

Montrer qu'un plan privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs.

**Exercice 35** [ 01149 ] [Correction]

Montrer que l'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

**Exercice 36** [01152] [Correction]

Soient  $A$  et  $B$  deux parties connexes par arcs d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

- Montrer que  $A \times B$  est connexe par arcs.
- En déduire que  $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$  est connexe par arcs.

**Exercice 37** [01148] [Correction]

Montrer que l'union de deux connexes par arcs non disjoints est connexe par arcs.

**Exercice 38** [01153] [Correction]

Soient  $A$  et  $B$  deux parties fermées d'un espace vectoriel normé  $E$  de dimension finie. On suppose  $A \cup B$  et  $A \cap B$  connexes par arcs, montrer que  $A$  et  $B$  sont connexes par arcs.

**Exercice 39** [01154] [Correction]

Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie  $n \geq 2$ .  
Montrer que la sphère unité  $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$  est connexe par arcs.

**Exercice 40** [01155] [Correction]

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension  $n \geq 2$ .

- Soit  $H$  un hyperplan de  $E$ . L'ensemble  $E \setminus H$  est-il connexe par arcs ?
- Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension  $p \leq n - 2$ . L'ensemble  $E \setminus F$  est-il connexe par arcs ?

**Exercice 41** [01156] [Correction]

Montrer que le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  formé des matrices diagonalisables est connexe par arcs.

**Exercice 42** [01157] [Correction]

Montrer que  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  n'est pas connexe par arcs.

**Exercice 43** [01158] [Correction]

Montrer que  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  est connexe par arcs.

**Exercice 44** [03867] [Correction]

Montrer que  $\text{SO}_2(\mathbb{R})$  est une partie connexe par arcs.

**Exercice 45** [01151] [Correction]

Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  injective et continue. Montrer que  $f$  est strictement monotone.  
Indice : on peut considérer  $\varphi(x, y) = f(x) - f(y)$  défini sur  $X = \{(x, y) \in I^2, x < y\}$ .

**Exercice 46** [01150] [Correction]

Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. On suppose que  $f'$  prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives et l'on souhaite établir que  $f'$  s'annule.

- Établir que  $A = \{(x, y) \in I^2, x < y\}$  est une partie connexe par arcs de  $I^2$ .
- On note  $\delta: A \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $\delta(x, y) = f(y) - f(x)$ . Établir que  $0 \in \delta(A)$ .
- Conclure en exploitant le théorème de Rolle

**Exercice 47** [03737] [Correction]

[Théorème de Darboux] Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

- Montrer que  $U = \{(x, y) \in I^2 \mid x < y\}$  est une partie connexe par arcs de  $\mathbb{R}^2$ .
- On note  $\tau: U \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par

$$\tau(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Justifier

$$\tau(U) \subset f'(I) \subset \overline{\tau(U)}$$

- En déduire que  $f'(I)$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 48** [04078] [Correction]

On note  $\mathcal{N}$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  nilpotentes. Montrer que  $\mathcal{N}$  est une partie étoilée.

## Corrections

### Exercice 1 : [énoncé]

- a)  $f(0, 1/n) = 0 \rightarrow 0$  et  $f(1/n, 1/n) = 1/2 \rightarrow 1/2$ . Pas de limite en  $(0, 0)$ .  
 b)  $f(1/n, 0) \rightarrow 1$  et  $f(1/n, -1/n) \rightarrow 1/2$ . Pas de limite en  $(0, 0)$ .  
 c)  $|f(x, y)| = |x| \frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}|x| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$  ou  $f(x, y) = r \cos^2 \theta \sin \theta \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$ .  
 d)  $|f(x, y)| \leq |xy| \left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{1}{2}|xy| \rightarrow 0$  ou  $f(x, y) = r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$ .

### Exercice 2 : [énoncé]

- a)  $f(0, 1/n) \rightarrow 0$  et  $f(1/n, 1/n^3) \rightarrow 1$ . Pas de limite en  $(0, 0)$ .  
 b)  $f(0, -1/n) = 2n \rightarrow +\infty$  et  $f(0, 1/n) = -2n \rightarrow -\infty$ . Pas de limite en  $(0, 0)$ .  
 c)  $0 \leq f(x, y) \leq \frac{x^2+2|x||y|+y^2}{|x|+|y|} = |x| + |y| \rightarrow 0$  ou  $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = O(r)$ .

### Exercice 3 : [énoncé]

- a) On écrit  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$  avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$  et alors

$$f(x, y) = r(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

- b)  $f(1/n, 0) \rightarrow 0$  et  $f(1/n, 1/n^3) \rightarrow 1$ . La fonction  $f$  n'a pas de limite en  $(0, 0)$ .  
 c)  $f(1/n, 0) = 0 \rightarrow 0$  et  $f(1/n, 1/n^2) = 1/2 \rightarrow 1/2$ . La fonction  $f$  n'a pas de limite en  $(0, 0)$ .  
 d)  $f(1/n, 0) = 0 \rightarrow 0$  et  $f(1/n + 1/n^2, 1/n) = \frac{1/n^2 + 1/n^3}{1/n^2} \rightarrow 1$ . La fonction  $f$  n'a pas de limite en  $(0, 0)$ .

### Exercice 4 : [énoncé]

- a)  $|f(x, y)| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = r |\sin \theta \cos \theta| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$   
 b)  $f(x, y) = x \frac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2}$  or  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$  donc  $f(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$ .

- c)  $f(1/n, 0) \rightarrow 1$  et  $f(1/n, 1/\ln n) \rightarrow 1/e$ . Pas de limite en  $(0, 0)$ .  
 d) Quand  $x \rightarrow 0$ ,  $f(x, -x + x^3) \sim -\frac{1}{x}$ . La fonction  $f$  n'a pas de limite en  $(0, 0)$ .

### Exercice 5 : [énoncé]

- a)  $f(x, y) = \exp(y \ln x)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  par opérations sur les fonctions continues.  
 Il reste à étudier la continuité aux points  $(0, b)$  avec  $b > 0$ .  
 Quand  $(x, y) \rightarrow (0, b)$  avec  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  on a  $y \ln x \rightarrow -\infty$  et donc  $f(x, y) = x^y \rightarrow 0$ .  
 D'autre part, quand  $(0, y) \rightarrow (0, b)$ , on a  $f(x, y) = 0 \rightarrow 0$ .  
 Ainsi  $f$  est continue en  $(0, b)$ .  
 b) Si l'on peut prolonger  $f$  par continuité à  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  alors d'une part  $f(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$  et d'autre part  $f(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = 1$ . C'est absurde.

### Exercice 6 : [énoncé]

Par le théorème des accroissements finis, il existe  $c_{x,y} \in ]0; x^2 + y^2[$  tel que  $F(x, y) = f'(c)$ .  
 Quand  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  alors  $c_{x,y} \rightarrow 0$  puis  $F(x, y) \rightarrow f'(0)$ .

### Exercice 7 : [énoncé]

Notons

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\} \text{ et } E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$f$  est continue en chaque point de  $D$  et  $E$ .

Soit  $(x_0, y_0)$  tel que  $x_0^2 + y_0^2 = 1$  (à la jonction de  $D$  et  $E$ ).

Quand  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  avec  $(x, y) \in D$ , on a

$$f(x, y) \rightarrow \frac{1}{2}x_0^2 + y_0^2 - 1 = -\frac{1}{2}x_0^2 = f(x_0, y_0)$$

Quand  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  avec  $(x, y) \in E$ , on a

$$f(x, y) \rightarrow -\frac{1}{2}x_0^2 = f(x_0, y_0)$$

Finalement  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$  et donc  $f$  est continue en.

**Exercice 8 :** [énoncé]

Soit  $a = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ .

Si  $\alpha \neq \beta$  alors au voisinage de  $a$ ,

$$F(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow a} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = F(\alpha, \beta)$$

Si  $\alpha = \beta$  alors :

Quand  $(x, y) \rightarrow a$  avec  $x = y$ ,  $F(x, x) = f'(x) \rightarrow f'(\alpha) = F(a)$ .

Quand  $(x, y) \rightarrow a$  avec  $x \neq y$ , par le théorème des accroissements finis

$$F(x, y) = f'(c)$$

avec  $c$  compris entre  $x$  et  $y$ . Par le théorème des gendarmes,  $c \rightarrow \alpha$  et par composition

$$F(x, y) \rightarrow f'(\alpha) = F(a)$$

Finalement  $F$  est continue en tout  $a \in \mathbb{R}^2$ .

**Exercice 9 :** [énoncé]

La partie  $\{\|x - a\| \mid a \in A\}$  est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide et minorée par 0 donc sa borne inférieure existe. Ainsi, l'application  $x \mapsto d(x, A)$  est bien définie. Soient  $x, x' \in E$ . Pour tout  $y \in A$ ,

$$\|x - y\| \leq \|x - x'\| + \|x' - y\|$$

donc

$$d(x, A) \leq \|x - x'\| + \|x' - y\|$$

puis

$$d(x, A) - \|x - x'\| \leq \|x' - y\|$$

En passant à la borne inférieure

$$d(x, A) - \|x - x'\| \leq d(x', A)$$

Ainsi,

$$d(x, A) - d(x', A) \leq \|x - x'\|$$

Par symétrie, on obtient

$$|d(x, A) - d(x', A)| \leq \|x - x'\|$$

Finalement, la fonction  $x \mapsto d(x, A)$  est lipschitzienne et donc continue.

**Exercice 10 :** [énoncé]

Soit  $\varphi: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $\varphi(t) = a + t.(b - a)$ .

Par composition  $f \circ \varphi$  est continue sur le segment  $[0; 1]$ .

Comme  $(f \circ \varphi)(0) = f(a)$  et  $(f \circ \varphi)(1) = f(b)$ , par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $t \in [0; 1]$  tel que  $(f \circ \varphi)(t) = y$ .

Pour  $x = \varphi(t) \in A$  on a  $y = f(x)$ .

**Exercice 11 :** [énoncé]

a) Soit  $f: t \mapsto g(R \cos t, R \sin t)$ .  $f$  est continue et  $2\pi$  périodique.

Soit  $h: t \rightarrow f(t + \pi) - f(t)$ .  $h$  est continue et  $h(0) + h(\pi) = f(2\pi) - f(0) = 0$  donc  $h$  s'annule.

b) Soit  $h: t \mapsto f(t + \pi/2) - f(t)$ .  $h$  est continue et

$h(0) + h(\pi/2) + h(\pi) + h(3\pi/2) = 0$  donc  $h$  s'annule.

**Exercice 12 :** [énoncé]

L'implication directe est immédiate. Inversement, supposons  $f_1$  et  $f_2$  continue.

Soit  $a \in E$ .

Si  $a \in E_1 \cap E_2$  alors la continuité de  $f_1$  et de  $f_2$  donne

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in E_1} f(a)$$

et

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in E_2} f(a)$$

donc

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in E} f(a)$$

Si  $a \in E_1 \setminus E_2$  alors il existe  $\alpha > 0$  tel que  $B(a, \alpha) \subset C_E E_2$  et donc  $B(a, \alpha) \subset E_1$ .

Puisque  $f$  coïncide avec la fonction continue  $f_1$  sur un voisinage de  $a$ , on peut conclure que  $f$  est continue en  $a$ .

Le raisonnement est semblable si  $a \in E_2 \setminus E_1$  et tous les cas ont été traités car  $E = E_1 \cup E_2$ .

**Exercice 13 :** [énoncé]

Pour tout  $a \in A$ ,

$$d(x, A) \leq \|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|$$

donc

$$d(x, A) - \|x - y\| \leq d(y, A)$$

puis

$$d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|$$

Par symétrie,

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$$

Ainsi  $x \mapsto d(x, A)$  est lipschitzienne.

#### Exercice 14 : [énoncé]

L'ensemble

$$A = \{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x, y \in [a; b], |f(x) - f(y)| \leq k \|x - y\|\}$$

est une partie de  $\mathbb{R}$ , non vide (car  $f$  est lipschitzienne) et minorée par 0.

Par suite  $N(f) = \inf A$  existe.

Montrons que cet inf est en fait un min.

Pour  $x, y \in [a; b]$  distincts, on a pour tout  $k \in A$ ,

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|} \leq k$$

En passant à la borne inférieure, on obtient

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|} \leq N(f)$$

puis

$$|f(x) - f(y)| \leq N(f) \|x - y\|$$

Cette identité est aussi valable quand  $x = y$  et donc  $N(f) \in A$ . Par conséquent l'application  $N: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  est bien définie. Supposons  $N(f) = 0$ . Pour tout  $x \in [a; b]$ ,

$$|f(x)| = |f(x) - f(a)| \leq 0 \cdot \|x - a\|$$

et donc  $f = 0$ .

Pour  $\lambda = 0$ , on a évidemment  $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$ .

Pour  $\lambda \neq 0$  et  $x, y \in [a; b]$ , l'inégalité

$$|f(x) - f(y)| \leq N(f) \|x - y\|$$

entraîne

$$|\lambda f(x) - \lambda f(y)| \leq |\lambda| N(f) \|x - y\|$$

On en déduit  $N(\lambda f) \leq |\lambda| N(f)$ .

Aussi, l'inégalité

$$|\lambda f(x) - \lambda f(y)| \leq N(\lambda f) \|x - y\|$$

entraîne

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{N(\lambda f)}{|\lambda|} \|x - y\|$$

On en déduit  $N(f) \leq N(\lambda f)/|\lambda|$  et finalement  $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$ .

Enfin, pour  $x, y \in [a; b]$ ,

$$\begin{aligned} |(f + g)(x) - (f + g)(y)| &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &\leq (N(f) + N(g)) \|x - y\| \end{aligned}$$

donc  $N(f + g) \leq N(f) + N(g)$ .

#### Exercice 15 : [énoncé]

a) Soient  $x_0 \in A$  et  $M \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $x \in A$ ,  $\|x\| \leq M$ .

Pour  $f \in \mathcal{L}$ , en notant  $k$  le rapport de lipschitzianité de  $f$ ,

$$\|f(x)\| \leq \|f(x_0)\| + \|f(x) - f(x_0)\| \leq \|f(x_0)\| + k \|x - x_0\| \leq \|f(x_0)\| + 2kM$$

b) L'ensemble  $K_f$  est une partie de  $\mathbb{R}$ , non vide (car  $f$  est lipschitzienne) et minorée par 0.

On en déduit que  $c(f) = \inf K_f$  existe dans  $\mathbb{R}_+$ .

Pour  $x, y \in A$  distincts, on a pour tout  $k \in K_f$

$$\frac{N(f(x) - f(y))}{N(x - y)} \leq k$$

En passant à la borne inférieure, on en déduit

$$\frac{N(f(x) - f(y))}{N(x - y)} \leq c(f)$$

et donc  $N(f(x) - f(y)) \leq c(f) N(x - y)$  et cette relation est aussi valable quand  $x = y$ .

Ainsi  $c(f) \in K_f$

c) L'application  $N_a$  est bien définie de  $\mathcal{L}$  vers  $\mathbb{R}_+$ .

Si  $N_a(f) = 0$  alors  $c(f) = 0$  et  $N(f(a)) = 0$ .

Par suite  $f$  est constante et  $f(a) = 0$  donc  $f$  est la fonction nulle.

$$N_a(\lambda f) = c(\lambda f) + |\lambda| N(f(a))$$

Montrons  $c(\lambda f) = |\lambda| c(f)$ .

Pour  $\lambda = 0$ , la propriété est immédiate.

Pour  $\lambda \neq 0$ ,

Pour tout  $x, y \in A$ ,

$$N(f(x) - f(y)) \leq c(f)N(x - y)$$

donne

$$N(\lambda f(x) - \lambda f(y)) \leq |\lambda| c(f)N(x - y)$$

On en déduit  $c(\lambda f) \leq |\lambda| c(f)$ .

De façon symétrique, on obtient  $c(f) \leq c(\lambda f)/|\lambda|$  et on peut conclure

$c(\lambda f) = |\lambda| c(f)$ .

On en déduit  $N_a(\lambda f) = |\lambda| N_a(f)$ .

$$N_a(f + g) \leq N(f(a)) + N(g(a)) + c(f + g)$$

Montrons  $c(f + g) \leq c(f) + c(g)$ .

Pour tout  $x, y \in A$ ,

$$N((f+g)(x) - (f+g)(y)) \leq N(f(x) - f(y)) + N(g(x) - g(y)) \leq (c(f) + c(g)) N(x - y)$$

On en déduit  $c(f + g) \leq c(f) + c(g)$  et on peut conclure

$N_a(f + g) \leq N_a(f) + N_a(g)$ .

Finalement  $N_a$  est une norme sur  $\mathcal{L}$ .

d)  $N(f(a)) \leq N(f(b)) + N(f(a) - f(b)) \leq N(f(b)) + \|a - b\| c(f)$ .

On en déduit  $N_a \leq (1 + \|a - b\|) N_b$  et de façon symétrique,

$N_a \leq (1 + \|b - a\|) N_a$ .

**Exercice 16 :** [énoncé]

Pour  $u, v \in B(0, 1)$ , on a

$$\|T(u) - T(v)\| = \|u - v\| \leq 2\|u - v\|$$

Pour  $u, v \notin B(0, 1)$ , on a

$$\|T(u) - T(v)\| = \left\| \frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{\| \|v\| u - \|u\| v \|}{\|u\| \|v\|}$$

or

$$\| \|v\| u - \|u\| v \| = \|v\| \|u - v\| + (\|v\| - \|u\|) \|v\|$$

donc

$$\|T(u) - T(v)\| \leq \frac{\|u - v\|}{\|u\|} + \frac{\| \|v\| - \|u\| \|}{\|u\|} \leq 2\|u - v\|$$

car  $\| \|v\| - \|u\| \| \leq \|v - u\|$  et  $\|u\| \geq 1$ .

Pour  $u \in B(0, 1)$  et  $v \notin B(0, 1)$ ,

$$\|T(u) - T(v)\| = \left\| u - \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{\| \|v\| u - v \|}{\|v\|} = \frac{\| \|v\| - 1 \|u\| + \|u - v\|}{\|v\|} \leq 2\|u - v\|$$

car  $\| \|v\| - 1 \| = \|v\| - 1 \leq \|v\| - \|u\| \leq \|v - u\|$  et  $\|v\| \geq 1$

**Exercice 17 :** [énoncé]

Si  $\|x\|, \|y\| \leq 1$  alors  $\|f(y) - f(x)\| = \|y - x\|$ .

Si  $\|x\| \leq 1$  et  $\|y\| > 1$  alors

$$\|f(y) - f(x)\| = \left\| \frac{y}{\|y\|} - x \right\| = \left\| \frac{y}{\|y\|} - y + y - x \right\| \leq \|y\| - 1 + \|y - x\| \leq 2\|y - x\|$$

Si  $\|x\|, \|y\| > 1$  alors

$$\|f(y) - f(x)\| = \left\| \frac{y}{\|y\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\| = \left\| \frac{y - x}{\|y\|} + x \left( \frac{1}{\|y\|} - \frac{1}{\|x\|} \right) \right\| \leq \frac{\|y - x\|}{\|y\|} + \frac{\| \|x\| - \|y\| \|}{\|y\|} \leq 2$$

Au final  $f$  est 2-lipschitzienne.

Supposons maintenant que la norme  $\|\cdot\|$  soit hilbertienne.

Si  $\|x\|, \|y\| \leq 1$  alors

$$\|f(y) - f(x)\| = \|y - x\|$$

Si  $\|x\| \leq 1$  et  $\|y\| > 1$  alors

$$\|f(y) - f(x)\|^2 - \|y - x\|^2 = 1 - \|y\|^2 - 2 \frac{\|y\| - 1}{\|y\|} (x | y)$$

Or  $|(x | y)| \leq \|x\| \|y\| \leq \|y\|$  donc

$$\|f(y) - f(x)\|^2 - \|y - x\|^2 \leq 1 - \|y\|^2 + 2(\|y\| - 1) = -(1 - \|y\|)^2 \leq 0$$

Si  $\|x\|, \|y\| > 1$  alors

$$\|f(y) - f(x)\|^2 - \|y - x\|^2 = 2 - \|y\|^2 - \|x\|^2 - 2 \frac{\|x\| \|y\| - 1}{\|x\| \|y\|} (x | y)$$

Or  $|(x | y)| \leq \|x\| \|y\|$  donc

$$\|f(y) - f(x)\|^2 - \|y - x\|^2 = 2 - \|y\|^2 - \|x\|^2 + 2(\|x\| \|y\| - 1) = -(\|x\| - \|y\|)^2 \leq 0$$

Au final  $f$  est 1-lipschitzienne.

**Exercice 18 :** [énoncé]

Par contraposée. Supposons que  $f$  ne soit pas continue. L'application linéaire  $f$  n'est donc pas continue en  $0_E$  et par suite il existe  $\varepsilon > 0$  vérifiant

$$\forall \alpha > 0, \exists x \in E, \|x\| \leq \alpha \text{ et } \|f(x)\| > \varepsilon$$

Pour  $\alpha = 1/n$ , il existe  $x_n \in E$  tel que  $\|x_n\| \leq 1/n$  et  $\|f(x_n)\| > \varepsilon$ .

Considérons alors  $y_n = \sqrt{n}x_n$ . On a  $\|y_n\| \leq 1/\sqrt{n}$  donc  $y_n \rightarrow 0$  et

$$\|f(y_n)\| > \sqrt{n}\varepsilon \rightarrow +\infty.$$

Ainsi, la suite  $(y_n)$  est une suite convergeant vers  $0_E$  dont la suite image  $(f(y_n))$  n'est pas bornée.

**Exercice 19 :** [énoncé]

La continuité de l'application linéaire  $\text{Id}_E$  de  $(E, N_1)$  vers  $(E, N_2)$  équivaut à l'existence d'un réel  $\alpha \geq 0$  vérifiant  $N_2(x) \leq \alpha N_1(x)$  pour tout  $x \in E$ . La propriété annoncée est alors immédiate.

**Exercice 20 :** [énoncé]

Considérons  $\alpha_0, \dots, \alpha_d$  des réels deux à deux distincts et  $\varphi: \mathbb{R}_d[X] \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$  définie par

$$\varphi(P) = (P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_d))$$

L'application  $\varphi$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimensions finies, c'est aussi une application linéaire continue car les espaces engagés sont de dimensions finies et il en est de même de  $\varphi^{-1}$ .

En notant  $f$  la limite simple de  $(f_n)$ , on a  $\varphi(f_n) \rightarrow (f(\alpha_0), \dots, f(\alpha_d))$ . En notant  $P$  l'élément de  $\mathbb{R}_d[X]$  déterminé par  $\varphi(P) = (f(\alpha_0), \dots, f(\alpha_d))$ , on peut écrire  $\varphi(f_n) \rightarrow \varphi(P)$ . Par continuité de l'application  $\varphi^{-1}$ , on a donc  $f_n \rightarrow P$  dans  $\mathbb{R}_d[X]$ . En choisissant sur  $\mathbb{R}_d[X]$ , la norme équivalente  $\|\cdot\|_{\infty, [a; b]}$ , on peut affirmer que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $P$  sur le segment  $[a; b]$ .

En particulier  $(f_n)$  converge simplement vers  $P$  et en substance  $P = f$ .

**Exercice 21 :** [énoncé]

Soit  $x \in \ker(u - \text{Id}_E) \cap \text{Im}(u - \text{Id}_E)$ .

On peut écrire  $x = u(a) - a$  pour un certain  $a \in E$  et on a  $u(x) = x$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la propriété  $u^k(x) = x$  donne

$$u^{k+1}(a) - u^k(a) = x$$

En sommant ces relations pour  $k$  allant de 0 jusqu'à  $n - 1$ , on obtient

$$u^n(a) - a = nx$$

et donc

$$\|x\| = \frac{1}{n} \|u^n(a) - a\| \leq \frac{1}{n} (\|u^n(a)\| + \|a\|) \leq \frac{2}{n} \|a\| \rightarrow 0$$

Ainsi  $x = 0$  et donc  $\ker(u - \text{Id}_E) \cap \text{Im}(u - \text{Id}_E) = \{0\}$ .

De plus, par la formule du rang

$$\dim \ker(u - \text{Id}_E) + \dim \text{Im}(u - \text{Id}_E) = \dim E$$

et donc les deux espaces  $\ker(u - \text{Id}_E)$  et  $\text{Im}(u - \text{Id}_E)$  sont supplémentaires.

**Exercice 22 :** [énoncé]

Par l'absurde, supposons  $\text{rg } p \neq \text{rg } q$  et, quitte à échanger, ramenons-nous au cas où  $\text{rg } p < \text{rg } q$ .

Par la formule du rang

$$\dim E - \dim \ker p < \text{rg } q$$

et donc

$$\dim E < \dim \ker p + \text{rg } q$$

On en déduit que les espaces  $\ker p$  et  $\text{Im } q$  ne sont pas supplémentaires et donc il existe un vecteur  $x \neq 0_E$  vérifiant

$$x \in \ker p \cap \text{Im } q$$

On a alors

$$(p - q)(x) = p(x) - q(x) = -x$$

donc

$$N((p - q)(x)) = N(x)$$

Or

$$N((p - q)(x)) < N(x)$$

C'est absurde.

**Exercice 23 :** [énoncé]

- a) Les applications  $\phi$  et  $\psi$  sont linéaires au départ d'un espace de dimension finie donc continues.

b) L'application  $f$  est bilinéaire au départ d'un produit d'espaces de dimensions finies donc continue.

c) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  et  $X$  un vecteur propre associé

$$AX = \lambda X \text{ avec } X \neq 0$$

On a alors

$$A^n X = \lambda^n X$$

donc

$$|\lambda^n| \|X\|_\infty = \|A^n X\| \leq p \|A^n\| \|X\|_\infty$$

avec  $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq p} |x_j| \neq 0$ .

On en déduit que la suite  $(\lambda^n)$  est bornée et donc  $|\lambda| \leq 1$ .

d)  $B^n \rightarrow C$  donc par extraction  $B^{2n} \rightarrow C$ . Or  $B^{2n} = B^n \times B^n \rightarrow C^2$  donc par unicité de la limite  $C = C^2$ . On en déduit que  $\text{Sp}C \subset \{0, 1\}$  car les valeurs propres figurent parmi les racines du polynôme annulateur  $X^2 - X$ .

Puisque la suite  $(B^n)$  converge, elle est bornée et donc les valeurs propres de  $B$  sont de modules inférieurs à 1.

**Exercice 24 : [énoncé]**

a) On a  $|a_n u_n| \leq \|a\|_\infty |u_n|$  et  $\sum |u_n|$  converge donc par comparaison de séries à termes positifs,  $\sum a_n u_n$  est absolument convergente et donc convergente.

b)  $|\langle a, u \rangle| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n u_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|a\|_\infty |u_n| = \|a\|_\infty \|u\|_1$ .  
On en déduit que  $\varphi_a$  est continue.

c) Par l'inégalité  $|\langle a, u \rangle| \leq \|a\|_\infty \|u\|_1$ , on obtient que  $\psi_a$  est continue.

**Exercice 25 : [énoncé]**

Pour montrer qu'une application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, E')$  est continue, il suffit de déterminer  $k \in \mathbb{R}$  vérifiant  $\|f(x)\| \leq k \|x\|$  pour tout  $x \in E$ .

Pour toute suite  $u = (u(n)) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ , on a pour tout naturel  $n$

$$|T(u)(n)| = |u(n+1)| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |u(n)| = \|u\|_\infty$$

La suite  $T(u)$  est effectivement bornée et

$$\|T(u)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |T(u)(n)| \leq 1 \times \|u\|_\infty$$

L'application linéaire  $T$  est donc continue.

On obtient de même que l'application linéaire  $\Delta$  est continue en observant

$$|\Delta(u)(n)| = |u(n+1) - u(n)| \leq |u(n+1)| + |u(n)| \leq 2 \|u\|_\infty$$

On peut aussi justifier que l'endomorphisme  $\Delta$  est continu par différence de fonctions continues sachant  $\Delta = T - \text{Id}_E$  avec  $T$  et  $\text{Id}_E$  endomorphismes continus.

**Exercice 26 : [énoncé]**

Pour tout  $f \in E$ ,

$$|\varphi(f)| \leq |f(1)| + |f(0)| \leq 2 \|f\|_\infty$$

donc  $\varphi$  est continue.

**Exercice 27 : [énoncé]**

L'application  $T$  est bien définie et est clairement linéaire. Pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $|T(f)(x)| \leq x N_1(f)$  donc

$$N_2(T(f)) = \|T(f)\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 2 N_1(f)$$

Ainsi  $T$  est continue.

**Exercice 28 : [énoncé]**

$T_\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  est bien définie et est clairement linéaire. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|T_\varphi(f)| \leq \|\varphi\|_2 \|f\|_2$$

donc  $T_\varphi$  est continue.

**Exercice 29 : [énoncé]**

Pour tout  $f \in E$ ,

$$|\varphi(f)| = \int_0^1 |tf(t)| dt \leq \|f\|_1$$

donc  $\varphi$  est continue.

**Exercice 30 : [énoncé]**

a) L'application  $N_1 : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}_+$  est bien définie car la somme se limite à un nombre fini de termes non nuls.

Si  $N_1(P) = 0$  alors

$$\forall k \in \mathbb{Z}, P^{(k)}(0) = 0$$

or

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

donc  $P = 0$ .

Soient  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ .

$$N_1(P + Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0) + Q^{(k)}(0)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| + |Q^{(k)}(0)|$$

donc

$$N_1(P + Q) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| + \sum_{k=0}^{+\infty} |Q^{(k)}(0)| = N_1(P) + N_1(Q)$$

Soient  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$N_1(\lambda P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda P^{(k)}(0)| = |\lambda| \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| = |\lambda| N_1(P)$$

Finalement  $N_1$  est une norme.

L'application  $N_2 : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}_+$  est bien définie car une fonction continue sur un segment y est bornée.

Si  $N_2(P) = 0$  alors

$$\forall t \in [-1; 1], P(t) = 0$$

Par infinité de racines  $P = 0$ .

Soient  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ .

$$N_2(P + Q) = \sup_{t \in [-1; 1]} |P(t) + Q(t)| \leq \sup_{t \in [-1; 1]} |P(t)| + |Q(t)|$$

donc

$$N_2(P + Q) \leq \sup_{t \in [-1; 1]} |P(t)| + \sup_{t \in [-1; 1]} |Q(t)| = N_2(P) + N_2(Q)$$

Soient  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$N_2(\lambda P) = \sup_{t \in [-1; 1]} |\lambda P(t)| = \sup_{t \in [-1; 1]} |\lambda| |P(t)| = |\lambda| \sup_{t \in [-1; 1]} |P(t)| = |\lambda| N_2(P)$$

Finalement  $N_2$  est aussi norme.

b) Notons  $D : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  l'opération de dérivation.

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], N_1(D(P)) = \sum_{k=0}^{+\infty} |D(P)^{(k)}(0)| = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k+1)}(0)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| = N_1(P)$$

donc l'endomorphisme  $D$  est continu pour la norme  $N_1$ .

c) Soit  $P_n = X^n$ . On a  $D(P_n) = nX^{n-1}$  donc  $N_2(P_n) = 1$  et  $N_2(D(P_n)) = n \rightarrow +\infty$ .

Par suite l'endomorphisme  $D$  n'est pas continu pour  $N_2$ .

d) Par ce qui précède, les normes ne sont pas équivalentes. Néanmoins

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k \text{ donc}$$

$$|P(t)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|P^{(k)}(0)|}{k!} \leq N_1(P)$$

donc

$$N_2(P) \leq N_1(P)$$

C'est là la seule (et la meilleure) comparaison possible.

### Exercice 31 : [énoncé]

$u$  est clairement un endomorphisme de  $E$ .

$$u(f)(x) = (1 - x)f(0) + xf(1)$$

donc

$$|u(f)(x)| \leq (1 - x)|f(0)| + x|f(1)| \leq (1 - x)\|f\|_\infty + x\|f\|_\infty = \|f\|_\infty$$

Ainsi  $\|u(f)\| \leq \|f\|$ . L'endomorphisme  $u$  est continu.

### Exercice 32 : [énoncé]

a) On a  $|a_n u_n| \leq \|a\|_\infty |u_n|$  et  $\sum |u_n|$  converge donc par comparaison de séries à termes positifs,  $\sum a_n u_n$  est absolument convergente et donc convergente.

b)

$$|\langle a, u \rangle| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n u_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|a\|_\infty |u_n| = \|a\|_\infty \|u\|_1$$

On en déduit que  $\varphi_u$  est continue.

c) Par l'inégalité  $|\langle a, u \rangle| \leq \|a\|_\infty \|u\|_1$ , on obtient que  $\psi_a$  est continue.

car les  $f_j$  sont unitaires. Par suite  $\ker(\Phi - \lambda \text{Id})$  est de dimension finie et sa dimension vérifie l'inégalité proposée.

**Exercice 33 :** [énoncé]

a) Pour  $f \in E$ ,  $\Phi(f) \in E$  car  $(x, y) \mapsto K(x, y)f(y)$  est continue et on intègre sur un segment. La linéarité de  $\Phi$  est évidente.

b) On a

$$\|\Phi(f)\|_\infty \leq \|K\|_\infty \|f\|_\infty$$

et

$$\|\Phi(f)\|_1 \leq \iint_{[0;1]^2} |K(x, y)f(y)| dx dy \leq \|K\|_\infty \|f\|_1$$

donc  $\Phi$  est continue pour  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|_1$ .

c) On a

$$(\Phi(f) | g) = \iint_{[0;1]^2} K(x, y)f(y)g(x) dx dy = (f | \Phi(g))$$

car

$$\forall(x, y) \in [0; 1]^2, K(x, y) = K(y, x)$$

d) Rappelons que l'espace normé  $(E, \|\cdot\|_\infty)$  est complet.

Avec plus de finesse que dans les inégalités du b), on peut affirmer

$$\|\Phi(f)\|_\infty \leq \Omega^{-1} \|f\|_\infty.$$

Pour  $h \in E$  et  $|\lambda| < \Omega$ , L'application  $T: f \mapsto \lambda\Phi(f) + h$  est  $\lambda\Omega$ -lipschitzienne avec  $|\lambda\Omega| < 1$ . Par le théorème du point fixe dans un espace complet, l'application  $T$  admet un unique point fixe et donc il existe un unique  $f \in E$  vérifiant  $h = f - \lambda\Phi(f)$ .

e) Soit  $(f_1, \dots, f_p)$  une famille orthonormée d'éléments de  $\ker(\Phi - \lambda \text{Id})$ . Soit  $y \in [0; 1]$  fixé et  $\varphi: x \mapsto K(x, y)$ . On peut écrire  $\varphi = \sum_{j=1}^p \mu_j f_j + \psi$  avec  $\psi \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)^\perp$  et

$$\mu_j = (f_j | \varphi) = \int_0^1 K(x, y)f_j(x) dx = \lambda f_j(y)$$

Par orthogonalité

$$\int_0^1 \varphi^2(x) dx = \sum_{j=1}^p \mu_j^2 + \|\psi\|_2^2 \geq \sum_{j=1}^p \mu_j^2$$

En intégrant on obtient

$$\iint_{[0;1]^2} K(x, y)^2 dx dy \geq \sum_{j=1}^p \int_0^1 \lambda^2 f_j^2(y) dy = \lambda^2 p$$

**Exercice 34 :** [énoncé]

Notons  $P_1, \dots, P_n$  les points à exclure.

Considérons une droite  $\mathcal{D}$  ne passant par aucun des points  $P_1, \dots, P_n$ . Cette droite est une partie connexe.

Considérons un point  $A$  du plan autre que  $P_1, \dots, P_n$ . Il existe une infinité de droites passant par  $A$  et coupant la droite  $\mathcal{D}$ . Parmi celles-ci, il y en a au moins une qui ne passe par les  $P_1, \dots, P_n$ . On peut donc relier  $A$  à un point de la droite  $\mathcal{D}$ .

En transitant par cette droite, on peut alors relier par un tracé continu excluant les  $P_1, \dots, P_n$ , tout couple de points  $(A, B)$  autres que les  $P_1, \dots, P_n$ .

**Exercice 35 :** [énoncé]

L'image d'un arc continu par une application continue est un arc continu. Ainsi, si  $X$  est connexe par arcs et  $f$  continue définie sur  $X$  alors pour tout  $f(x), f(y) \in f(X)$ , l'image par  $f$  d'un arc continu reliant  $x$  et  $y$  est un arc continu reliant  $f(x)$  à  $f(y)$  et donc  $f(X)$  est connexe par arcs.

**Exercice 36 :** [énoncé]

a) Soient  $(a, b) \in A \times B$  et  $(a', b') \in A \times B$ . Par la connexité de  $A$  et  $B$ , il existe  $\varphi: [0; 1] \rightarrow A$  et  $\psi: [0; 1] \rightarrow B$  continues vérifiant  $\varphi(0) = a, \varphi(1) = a'$  et  $\psi(0) = b, \psi(1) = b'$ . L'application  $\theta: [0; 1] \rightarrow A \times B$  définie par  $\theta(t) = (\varphi(t), \psi(t))$  est continue et vérifie  $\theta(0) = (a, b)$  et  $\theta(1) = (a', b')$ . Ainsi  $A \times B$  est connexe par arcs.

b)  $A + B$  est l'image de  $A \times B$  par l'application continue  $(x, y) \mapsto x + y$  de  $E \times E$  vers  $E$ ,  $A + B$  est donc connexe par arcs.

**Exercice 37 :** [énoncé]

Si les deux points à relier figurent dans un même connexe par arcs, le problème est résolu. Sinon, on transite par un point commun au deux connexes pour former un arc reliant ces deux points et inclus dans l'union.

**Exercice 38 :** [énoncé]

Il nous suffit d'étudier  $A$ .

Soient  $a, a' \in A$ .  $A \subset A \cup B$  donc il existe  $\varphi: [0; 1] \rightarrow A \cup B$  continue telle que  $\varphi(0) = a$  et  $\varphi(1) = a'$ .

Si  $\varphi$  ne prend pas de valeurs dans  $B$  alors  $\varphi$  reste dans  $A$  et résout notre problème.

Sinon posons  $t_0 = \inf \{t \in [0; 1] \mid \varphi(t) \in B\}$  et  $t_1 = \sup \{t \in [0; 1] \mid \varphi(t) \in B\}$ .  $\varphi$  étant continue et  $A, B$  fermés,

$$\varphi(t_0), \varphi(t_1) \in A \cap B$$

$A \cap B$  étant connexe par arcs, il existe  $\psi: [t_0; t_1] \rightarrow A \cap B$  continue tel que  $\psi(t_0) = \varphi(t_0)$  et  $\psi(t_1) = \varphi(t_1)$ . En considérant  $\theta: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\theta(t) = \psi(t)$  si  $t \in [t_0; t_1]$  et  $\theta(t) = \varphi(t)$  sinon, on a  $\theta: [0; 1] \rightarrow A$  continue et  $\theta(0) = a, \theta(1) = a'$ .

Ainsi  $A$  est connexe par arcs.

**Exercice 39 :** [énoncé]

Soient  $a, b \in S$ .

Si  $a \neq -b$ . On peut alors affirmer que pour tout  $\lambda \in [0; 1]$ ,  $(1 - \lambda)a + \lambda b \neq 0$ .

L'application  $\lambda \mapsto \frac{1}{\|(1-\lambda)a + \lambda b\|}((1-\lambda)a + \lambda b)$  est alors un chemin joignant  $a$  à  $b$  inscrit dans  $S$ .

Si  $a = -b$ , on transite par un point  $c \neq a, b$  ce qui est possible car  $n \geq 2$ .

**Exercice 40 :** [énoncé]

- a) Non. Si on introduit  $f$  forme linéaire non nulle telle que  $H = \ker f$ ,  $f$  est continue et  $f(E \setminus H) = \mathbb{R}^*$  non connexe par arcs donc  $E \setminus H$  ne peut l'être.
- b) Oui. Introduisons une base de  $F$  notée  $(e_1, \dots, e_p)$  que l'on complète en une base de  $E$  de la forme  $(e_1, \dots, e_n)$ .

Sans peine tout élément  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  de  $E \setminus F$  peut être lié par un chemin continue dans  $E \setminus F$  au vecteur  $e_n$  si  $x_n > 0$  ou au vecteur  $-e_n$  si  $x_n < 0$  (prendre  $x(t) = (1-t)x_1 e_1 + \dots + (1-t)x_{n-1} e_{n-1} + ((1-t)x_n + t)e_n$ ). De plus, les vecteurs  $e_n$  et  $-e_n$  peuvent être reliés par un chemin continue dans  $E \setminus F$  en prenant  $x(t) = (1-2t)e_n + (t-t^2)e_{n-1}$ . Ainsi  $E \setminus F$  est connexe par arcs.

**Exercice 41 :** [énoncé]

Notons  $\mathcal{D}_n$  la partie de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  étudiée et montrons que toute matrice de  $\mathcal{D}_n$

peut-être reliée par un chemin continu inscrit dans  $\mathcal{D}_n$  à la matrice  $I_n$  ce qui suffit pour pouvoir conclure.

Soit  $A \in \mathcal{D}_n$ . Il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}AP = D$  avec  $D$  diagonale.

Considérons alors  $\gamma: [0; 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par  $\gamma(t) = PD(t)P^{-1}$  avec

$$D(t) = (1-t)D + tI_n.$$

L'application  $\gamma$  est continue, à valeurs dans  $\mathcal{D}_n$  avec  $\gamma(0) = A$  et  $\gamma(1) = I_n$  : elle résout notre problème.

En fait

$$\gamma(t) = (1-t).A + t.I_n$$

est un paramétrage du segment  $[I_n; A]$  et l'ensemble des matrice diagonalisable apparaît comme un étoilé.

**Exercice 42 :** [énoncé]

L'application  $\det: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et l'image de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  par celle-ci est  $\mathbb{R}^*$  qui n'est pas connexe par arcs donc  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  ne peut l'être.

**Exercice 43 :** [énoncé]

Pour montrer que  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  est connexe par arcs, il suffit d'observer que toute matrice  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  peut être reliée continûment dans  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  à la matrice  $I_n$ . Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ . La matrice  $A$  est trigonalisable, il existe  $P$  inversible telle que  $B = P^{-1}AP = (b_{i,j})$  soit triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls. Nous allons construire un chemin continue joignant  $I_n$  à  $B$  dans  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  puis en déduire un chemin joignant  $I_n$  à  $A$  lui aussi dans  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ .

Pour  $i > j$ , posons  $m_{i,j}(t) = 0$ .

Pour  $i < j$ , posons  $m_{i,j}(t) = tb_{i,j}$  de sorte que  $m_{i,j}(0) = 0$  et  $m_{i,j}(1) = b_{i,j}$ .

Pour  $i = j$ , on peut écrire  $b_{i,i} = \rho_i e^{i\theta_i}$  avec  $\rho_i \neq 0$ . Posons  $m_{i,i}(t) = \rho_i^t e^{it\theta_i}$  de sorte que  $m_{i,i}(0) = 1, m_{i,i}(1) = b_{i,i}$  et

$$\forall t \in [0; 1], m_{i,i}(t) \neq 0$$

L'application  $t \mapsto M(t) = (m_{i,j}(t))$  est continue, elle joint  $I_n$  à  $B$  et ses valeurs prises sont des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux non nuls, ce sont donc des matrices inversibles.

En considérant  $t \mapsto PM(t)P^{-1}$ , on dispose d'un chemin continu joignant  $I_n$  à  $A$  et restant inscrit dans  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ .

On peut donc conclure que  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  est connexe par arcs.

**Exercice 44 :** [énoncé]

On sait

$$\text{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Par ce paramétrage, on peut affirmer que  $\text{SO}_2(\mathbb{R})$  est connexe par arcs, car image continue de l'intervalle  $\mathbb{R}$  par l'application

$$\theta \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

**Exercice 45 :** [énoncé]

$X$  est une partie connexe par arcs (car convexe) et  $\varphi$  est continue donc  $\varphi(X)$  est une partie connexe par arcs de  $\mathbb{R}$ , c'est donc un intervalle.

De plus  $0 \notin \varphi(X)$  donc  $\varphi(X) \subset \mathbb{R}_+^*$  ou  $\varphi(X) \subset \mathbb{R}_-^*$  et on peut conclure.

**Exercice 46 :** [énoncé]

- $A$  est une partie convexe donc connexe par arcs.
- L'application  $\delta$  est continue donc  $\delta(A)$  est connexe par arcs c'est donc un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Puisque  $f'$  prend des valeurs strictement positives et strictement négative, la fonction  $f$  n'est pas monotone et par conséquent des valeurs positives et négatives appartiennent à l'intervalle  $\delta(A)$ . Par conséquent  $0 \in \delta(A)$ .
- Puisque  $0 \in \delta(A)$ , il existe  $a < b \in I$  tels que  $f(a) = f(b)$ . On applique le théorème de Rolle sur  $[a; b]$  avant de conclure.

**Exercice 47 :** [énoncé]

- La partie  $U$  est convexe donc connexe par arcs.
- Par le théorème des accroissements finis, un taux de variation est un nombre dérivé et donc

$$\tau(U) \subset f'(I)$$

De plus, tout nombre dérivé est limite d'un taux de variation, donc

$$f'(I) \subset \overline{\tau(U)}$$

- Puisque l'application  $\tau$  est continue sur  $U$  connexe par arcs, son image  $\tau(U)$  est un connexe par arcs de  $\mathbb{R}$ , c'est donc un intervalle. L'encadrement précédent assure alors aussi que  $f'(I)$  est aussi un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 48 :** [énoncé]

On vérifie aisément

$$\forall A \in \mathcal{N}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.A \in \mathcal{N}$$

On a donc immédiatement

$$\forall A \in \mathcal{N}, [O_n; A] \subset \mathcal{N}$$

L'ensemble  $\mathcal{N}$  est donc étoilé en  $O_n$  (au surplus, c'est un ensemble connexe par arcs).