

Probabilités

Partie 3

Dans toute cette partie, $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un espace probabilisé.

Cette partie constitue la suite de Partie 1 et Partie 2.

1) Fonction de répartition d'une var

Déf 1

Soit X une var sur Ω .

La fonction de répartition de X , notée F_X , est définie par:

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad F_X(x) = P(X \leq x)$$

Déf 2

1) Soient X et Y deux var.

La fonction de répartition du couple (X, Y) , notée $F_{(X, Y)}$, est définie par:

$$F_{(X, Y)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_{(X, Y)}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

2) Soient $X_1, \dots, X_n$ des var.

La fonction de répartition de $(X_1, \dots, X_n)$, notée $F_{(X_1, \dots, X_n)}$ est

définie par:

$$F_{(X_1, \dots, X_n)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

Propriétés 3

Soient X une var et F sa fonction de répartition. On a :

- 1) F est Croissante sur $\mathbb{R}$.
- 2) F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
- 3) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :
 - i) $\lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = P(X < a)$
 - ii) F continue en $a \Leftrightarrow P(X = a) = 0$
- 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Démo

- 1) F est Croissante sur $\mathbb{R}$?
Supp que $x \leq y$ et M. que $F(x) \leq F(y)$.
Càd M. que $P(X \leq x) \leq P(X \leq y)$.
On a $(X \leq x) \subset (X \leq y)$ car $x \leq y$
D'où $P(X \leq x) \leq P(X \leq y)$ $\square$

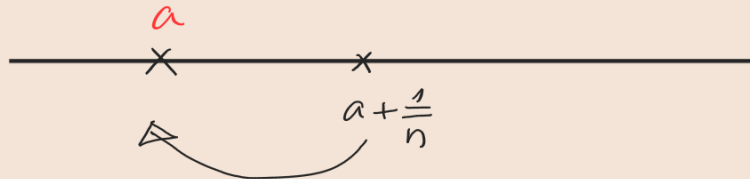
$$F(x) = P(X \leq x)$$

Rappel

- 2) F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$?
Soit $a \in \mathbb{R}$. M. que $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(a)$.

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Rappel

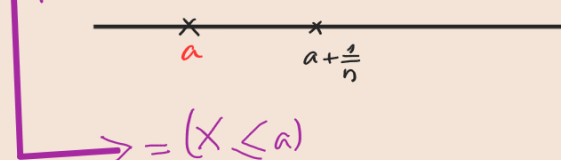


$$\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(a + \frac{1}{n})$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X \leq a + \frac{1}{n})$$

$$\text{Or: } \begin{cases} \forall n \geq 1, (X \leq a + \frac{1}{n+1}) \subset (X \leq a + \frac{1}{n}) \\ \text{Car } a + \frac{1}{n+1} \leq a + \frac{1}{n} \end{cases}$$

Alors $\left((X \leq a + \frac{1}{n}) \right)_{n \geq 1}$ est décroissante.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X \leq a + \frac{1}{n}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} (X \leq a + \frac{1}{n}) \right)$$


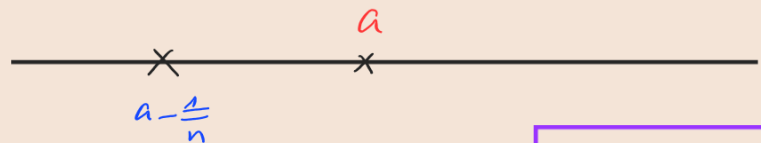
$$\rightarrow = (X \leq a)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X \leq a + \frac{1}{n}) = P(X \leq a)$$

$$\text{Ainsi: } \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) &= P(X \leq a) \\ &= F(a) \end{aligned}$$

3) Soit $a \in \mathbb{R}$, on a :

i) $\lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = P(X < a)$



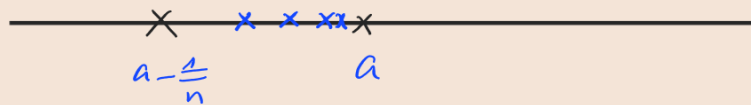
$$\lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(a - \frac{1}{n})$$

$F(x) = P(X \leq x)$
Rappel

$$= \lim_n P(X \leq a - \frac{1}{n})$$

Or $\left(X \leq a - \frac{1}{n} \right)_{n \geq 1}$ est $\nearrow$ alors :

$$\lim_n P(X \leq a - \frac{1}{n}) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (X \leq a - \frac{1}{n}) \right)$$



$$\text{et on a : } \bigcup_{n=1}^{+\infty} (X \leq a - \frac{1}{n}) = (X < a)$$

$$\text{Donc } \lim_n P(X \leq a - \frac{1}{n}) = P(X < a)$$

$$\text{Donc : } \boxed{\lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = P(X < a)}$$



$$\text{ii) } F \text{ continue en } a \Leftrightarrow P(X=a)=0 \text{ ?}$$

$$F \text{ continue en } a \Leftrightarrow F \text{ continue à gauche en } a \text{ (car déjà cont à drte)}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = F(a)$$

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x)}$$

Rappel

$$\Leftrightarrow P(X < a) = P(X \leq a)$$

§!

$$\Leftrightarrow P(X < a) = P(X=a) + P(X < a)$$

$$\Leftrightarrow P(X=a)=0$$



$$4) F \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \text{ existent (dans } \overline{\mathbb{R}})$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \text{ ?}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(-n)$$

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x)}$$

Rappel

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X \leq -n)$$

$$\text{Or } (X \leq -n)_n \text{ est } \downarrow \left(\begin{array}{l} (X \leq -(n+1)) \subset (X \leq -n) \\ \text{Car } -(n+1) \leq -n \end{array} \right)$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X \leq -n) = P\left(\bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} (X \leq -n)\right)$$

$$\text{Or } \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} (X \leq -n) = \emptyset$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X \leq -n) = P(\emptyset) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0} \quad \square$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 ?$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n)$$

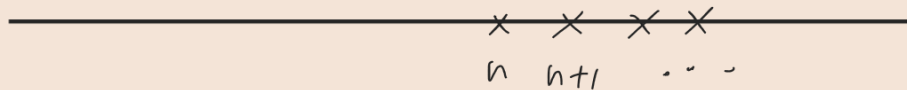
$$\boxed{F(x) = P(X \leq x)} \quad \text{Rappel}$$

$$= \lim_n P(X \leq n)$$

$$\text{Or } (X \leq n)_n \nearrow \left(\begin{array}{l} (X \leq n) \subset (X \leq n+1) \\ \text{Car } n \leq n+1 \end{array} \right)$$

$$\text{Ainsi } \lim_n P(X \leq n) = P\left(\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} (X \leq n)\right)$$

$$\text{Et on a : } \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} (X \leq n) = \Omega$$



$$\text{Donc } \lim_n P(X \leq n) = P(\Omega) = 1$$

$$\text{Enfin } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1} \quad \square$$

Prop 4 Soit X une var.

Si on connaît la loi de X , alors on connaît sa fonction de répartition. Et inversement.

Démo

1) Supposons connaître la loi de X .

Alors que la fonction de répartition F_X sera connue.

$P(X \in I)$ connu
 $\downarrow \forall I \text{ int}$

$$\begin{aligned} \text{On a } F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(X \in]-\infty, x]) \quad \square \end{aligned}$$

2) Supposons connaître la fonction de répartition F_X .

Alors que la loi de X sera connue.

C'est-à-dire que $P(X \in I)$ sera connue, pour tout intervalle I .

i) Si $I =]-\infty, a]$:

$$\begin{aligned} P(X \in I) &= P(X \leq a) \\ &= F_X(a), \text{ donc connue. } \quad \square \end{aligned}$$

ii) Si $I =]a, +\infty[$

$$\begin{aligned} P(X \in I) &= P(X > a) \\ &= 1 - P(X \leq a) \\ &= 1 - F_X(a) \quad (\text{connue}) \quad \square \end{aligned}$$

$$\text{iii) } S: I =]-\infty, a[$$

$$P(X \in I) = P(X < a)$$

$$= \lim_{t \rightarrow a^-} F_X(t)$$



$$\text{iv) } S: I = [a, b]$$

$$P(X \in I) = P(a \leq X \leq b)$$

$$= P(X \leq b) - P(X < a)$$

$$= P(X \leq b) - P(X < a) \quad \left(\begin{array}{l} \text{Si } (X < a) \subset (X \leq b) \\ \text{car } a \leq b \end{array} \right)$$

$$= F_X(b) - \lim_{t \rightarrow a^-} F_X(t)$$



Les autres Cas m'exo.

Corollaire 5

Si F_X est continue sur $\mathbb{R}$, alors toutes les expressions suivantes sont égales :

$$1) P(a \leq X \leq b)$$

$$2) P(a < X \leq b)$$

$$3) P(a \leq X < b)$$

$$4) P(a < X < b)$$

$$5) F_X(b) - F_X(a)$$

Démo

Supp que F_X est continue sur $\mathbb{R}$, alors $(\forall t \in \mathbb{R}, P(X=t)=0)$

ii) M. que : $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b)$

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(a < X \leq b) + \underbrace{P(X=a)}_{=0} \\ &= P(a < X \leq b) \end{aligned}$$

On montre de même que :

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad F_X(b) - F_X(a) &= P(X \leq b) - P(X \leq a) \\ &= P((X \leq b) \setminus (X \leq a)) \quad \left(\begin{array}{l} P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \\ \text{si } A \subset B \end{array} \right) \\ &= P(a < X \leq b) \end{aligned}$$



2) Image d'une var

Notations

1) Soient $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une var et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

La composée $f \circ X$ se note $f(X)$.

2) Si X et $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux var et $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$f \circ (X, Y)$ se note $f(X, Y)$.

3) Si $X_1, \dots, X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ des var et $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

$f \circ (X_1, \dots, X_n)$ se note $f(X_1, \dots, X_n)$.

Prop 1

1) Si X et $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux var et $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors $f(X, Y)$ est aussi une var.

2) Si $X_1, \dots, X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ des var et $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors $f(X_1, \dots, X_n)$ est aussi une var.

Exemple

Si X et Y sont deux var, alors il en est de même pour :

1) $X+Y$; $(f: (x, y) \mapsto x+y)$ continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.

2) XY ; $(f: (x, y) \mapsto xy)$ continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.

3) $\max(X, Y)$; $(f: (x, y) \mapsto \max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2})$; f continue sur $\mathbb{R}^2$ par opérations sur les ...

4) $\min(X, Y)$...

Rappel

$$\max(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2} \quad ; \quad \min(a,b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$$

NB

N'apprenez pas ces deux égalités par cœur, mais sachez comment les retrouver :

$$\text{On a } \begin{cases} \max(a,b) + \min(a,b) = a+b \\ \max(a,b) - \min(a,b) = |a-b| \end{cases}$$

Par sommation et par soustraction, on tire $\max(a,b)$ et $\min(a,b)$.

Prop 2

Si $\left(\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, X_n \text{ var} \\ (X_n)_n \text{ converge simplement vers } X \end{array} \right)$ alors X var.

3) Indépendance héritée

Prop 1 (Rappel)

Si les var X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont aussi indépendantes, pour toutes f et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues ou monotones.

Prop 2

Si $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_S$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_n)$ et $g(X_{n+1}, \dots, X_S)$ sont deux var indépendantes, où f et g continues.

Par exemple

1) Si X, Y et Z sont indépendantes alors il en est de même pour les var $(X+Y)$ et Z .

2) Si $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ sont indépendantes alors il en est de même pour

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \text{ et } X_{n+1}^2.$$

4) Un système complet d'événements usuel

Prop

Soit $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une var discrète.

Supposons que $X(\Omega) = \mathcal{D}$ est dénombrable. On a :

1) $(X=d)_{d \in \mathcal{D}}$ est un système complet d'événements.

2) $(P(X=d))_{d \in \mathcal{D}}$ est une famille sommable, et on a :

$$\sum_{d \in \mathcal{D}} P(X=d) = 1$$

Démo

1) $(X=d)_{d \in \mathcal{D}}$ est un système complet d'événements ?

i) Si $d \neq d'$, alors $(X=d) \cap (X=d') = \emptyset$ (claire).
impossible

ii) $\Omega = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} (X=d)$?

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ application.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Omega &= X^{-1}(X(\Omega)) \\ &= X^{-1}(\mathcal{D}) \\ &= X^{-1}\left(\bigcup_{d \in \mathcal{D}} \{d\}\right) \\ &= \bigcup_{d \in \mathcal{D}} X^{-1}(\{d\}) \\ &= \bigcup_{d \in \mathcal{D}} (X=d)\end{aligned}$$

□

2) $(P(X=d))_{d \in \mathcal{D}}$ est une famille sommable, et on a :

$$\sum_{d \in \mathcal{D}} P(X=d) = 1 \quad ?$$

Soit $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{D}$ une bijection. $\mathcal{D} = \{\sigma(k) / k \in \mathbb{N}\}$

On a :

Rappel

$(P(X=d))_{d \in \mathcal{D}}$ sommable $\Leftrightarrow$ La série $\sum_{k \geq 0} P(X=\sigma(k))$ CV

Dans ce cas, on a :

$$\sum_{d \in \mathcal{D}} P(X=d) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=\sigma(k))$$

$$\text{On a } \Omega = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} (X=d) \quad (\text{SCE})$$

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (X=\sigma(k))$$

$$\Rightarrow P(\Omega) = P\left(\bigsqcup_{k=0}^{+\infty} (X = \sigma(k))\right)$$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = \sigma(k)) \quad \left(\text{car les } (X = \sigma(k)) \text{ sont 2 à 2 incompatibles}\right)$$

D'où la série $\sum_{k \geq 0} P(X = \sigma(k))$ converge.

Par suite $(P(X=d))_{d \in D}$ est une famille sommable.

$$\text{Et donc } \sum_{d \in D} P(X=d) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = \sigma(k)) = 1 \quad \square$$

5) Espérance d'une var discrète

Déf

Soit X une var discrète.

Supposons que $D = X(\Omega)$ est dénombrable.

1) On dit que X possède une espérance si et ssi la famille

$$\left(x P(X=x)\right)_{x \in D} \text{ est sommable.}$$

2) Dans ce cas, l'espérance de X est définie par :

$$E(X) = \sum_{x \in D} x P(X=x)$$

Soit $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une var discrète.

$X(\Omega) = \mathcal{D}$ dénombrable.

Soit $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{D}$ une bijection.

$$k \mapsto \sigma(k) = x_k$$

1) On sait, via les familles sommables, que :

$$i) \left(x P(X=x) \right)_{x \in \mathcal{D}} \text{ sommable} \Leftrightarrow \sum_{k \geq 0} x_k P(X=x_k) \text{ ACV}$$

ii) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{x \in \mathcal{D}} x P(X=x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k P(X=x_k)$$

Ainsi, on a :

$$X \text{ possède une espérance} \Leftrightarrow \left(x P(X=x) \right)_{x \in \mathcal{D}} \text{ sommable}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k \geq 0} x_k P(X=x_k) \text{ ACV}$$

Supp X possède une espérance. On a :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x \in \mathcal{D}} x P(X=x) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} x_k P(X=x_k) \end{aligned}$$

Déjà vu en partie 2

6) Propriétés de transfert

Prop 1

Soit $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une var discrète, où $\mathcal{D} = X(\Omega)$ dénombrable.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue ou monotone.

1) $f(X)$ possède une espérance si etssi $\left(f(x) P(X=x) \right)_{x \in \mathcal{D}}$ est une famille sommable.

2) Dans ce cas, on a :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in \mathcal{D}} f(x) P(X=x)$$

Soit $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une var discrète.

$X(\Omega) = \mathcal{D}$ dénombrable.

Soit $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{D}$ une bijection.

$$k \mapsto \sigma(k) = x_k$$

1) On sait, via les familles sommables, que :

$$i) \left(f(x) P(X=x) \right)_{x \in \mathcal{D}} \text{ sommable} \Leftrightarrow \sum_{k \geq 0} f(x_k) P(X=x_k) < +\infty$$

ii) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{x \in \mathcal{D}} f(x) P(X=x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(x_k) P(X=x_k)$$

Ainsi, on a :

$$1) f(x) \text{ possède une espérance} \Leftrightarrow \left(f(x) P(X=x) \right)_{x \in D} \text{ sommable}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k \geq 0} f(x_k) P(X=x_k) \text{ ACV}$$

2) Supp $f(x)$ possède une espérance. On a :

$$E(f(x)) = \sum_{x \in D} f(x) P(X=x)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} f(x_k) P(X=x_k)$$

Déjà vu en partie 2

Prop 2

Soit (X, Y) un couple de var discrètes.

Notons $X(\Omega) = \{x_i / i \in \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j / j \in \mathbb{N}\}$, où les x_i (resp. y_j) sont distincts deux à deux.

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On a :

1) La var $f(X, Y)$ possède une espérance si et si la famille

$$\left(f(x_i, y_j) P(X=x_i, Y=y_j) \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \text{ est sommable.}$$

2) Dans ce cas, on a :

$$E(f(X, Y)) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} f(x_i, y_j) P(X=x_i, Y=y_j)$$

Par exemple

Avec les notations de la prop 2, on a :

1) i) $(X+Y)$ possède une espérance si et si $\left((x_i + y_j) P(X=x_i, Y=y_j) \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

ii) Dans ce cas, on a :

$$E(X+Y) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} (x_i + y_j) P(X=x_i, Y=y_j)$$

2) i) (X,Y) possède une espérance si et si $\left(x_i y_j P(X=x_i, Y=y_j) \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

ii) Dans ce cas, on a :

$$E(XY) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} x_i y_j P(X=x_i, Y=y_j)$$

Prop 3

Soit (X,Y) un couple de var discrètes.

Si X et Y possèdent une espérance alors $(X+Y)$ la possède aussi, et

On a :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Démo

Supp que X et Y possèdent une espérance.

M que $(X+Y)$ possède aussi une espérance.

Notons $X(\Omega) = \{x_i / i \in \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j / j \in \mathbb{N}\}$.

On a X et Y possèdent une espérance, alors les séries $\sum_{i \geq 0} x_i P(X=x_i)$ et $\sum_{j \geq 0} y_j P(Y=y_j)$ sont ACV.

On a :

$(X+Y)$ possède aussi une espérance $\Leftrightarrow \left((x_i + y_j) P(X=x_i, Y=y_j) \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ sommable.

$$\Leftrightarrow \left(x_i P(X=x_i, Y=y_j) + y_j P(X=x_i, Y=y_j) \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \text{ sommable.}$$

Pour m. que $(X+Y)$ possède aussi une espérance, il suffit alors de montrer que les deux familles $\left(x_i P(X=x_i, Y=y_j) \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ et

$\left(y_j P(X=x_i, Y=y_j) \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ sont sommables.

a) $\left(x_i P(X=x_i, Y=y_j) \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ sommable ?

$$\left(x_i P(X=x_i, Y=y_j) \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \text{ sommable} \Leftrightarrow \left(|x_i| P(X=x_i, Y=y_j) \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \text{ sommable}$$

a) 1) Soit $i \in \mathbb{N}$. On a $\sum_{j \geq 0} |x_i| P(X=x_i, Y=y_j)$ CV ; en effet.

Il suffit de vérifier que $\sum_{j \geq 0} P(X=x_i, Y=y_j)$ CV

Ce qui est vrai car d'après la formule des probas totales :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i) \quad \square$$

a) La série $\sum_{i \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |x_i| P(X=x_i, Y=y_j) \right)$ CV ; en effet :

$$\begin{aligned} \text{On a } \sum_{j=0}^{+\infty} |x_i| P(X=x_i, Y=y_j) &= |x_i| \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} P(X=x_i, Y=y_j)}_{= P(X=x_i) \text{ ; Form Prob Totale}} \\ &= |x_i| P(X=x_i) \end{aligned}$$

Alors la série $\sum_{i \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |x_i| P(X=x_i, Y=y_j) \right)$ c'est la

série $\sum_{i \geq 0} |x_i| P(X=x_i)$ qui est CV, car X possède une espérance. $\square$

Ainsi, $\left(|x_i| P(X=x_i, Y=y_j) \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ sommable

b) $\left(y_j P(X=x_i, Y=y_j) \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ sommable ?

On procède comme dans a).

Enfin, $(X+Y)$ possède aussi une espérance $\square$

i) $(X+Y)$ possède une espérance si et ss $\left((x_i + y_j) P(X=x_i, Y=y_j) \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

ii) Dans ce cas, on a :

$$E(X+Y) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} (x_i + y_j) P(X=x_i, Y=y_j)$$

Rappel

→ Montrer: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$:

On a:

$$E(X+Y) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} (x_i + y_j) P(X=x_i, Y=y_j)$$

$$= \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} (x_i P(X=x_i, Y=y_j) + y_j P(X=x_i, Y=y_j))$$

$$= \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} x_i P(X=x_i, Y=y_j) + \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} y_j P(X=x_i, Y=y_j)$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} x_i P(X=x_i, Y=y_j) \right) + \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} y_j P(X=x_i, Y=y_j) \right)$$

Car les deux familles réelles sont summables.

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{+\infty} P(X=x_i, Y=y_j) \right)}_{= P(X=x_i)} + \sum_{j=0}^{+\infty} y_j \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{+\infty} P(X=x_i, Y=y_j) \right)}_{= P(Y=y_j)}$$

d'après la FPT d'après la FPT

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} x_i P(X=x_i) + \sum_{j=0}^{+\infty} y_j P(Y=y_j)$$

$$= E(X) + E(Y)$$



Corollaire 4

Soit $n \geq 1$.

Si $X_1, \dots, X_n$ des var discrètes possédant des espérances, alors pour tout $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, la var $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ possède aussi une espérance, et on a:

$$E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$$

Prop 5

Si X et Y sont deux var discrètes indépendantes et possédant des espérances, alors leur produit XY possède aussi une espérance, et on a:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Démo

Notons $X(\Omega) = \{x_i / i \in \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j / j \in \mathbb{N}\}$ (dénombrables).

On a X et Y possédant une espérance, alors les séries $\sum_{i \geq 0} x_i P(X=x_i)$

et $\sum_{j \geq 0} y_j P(Y=y_j)$ sont ACV.

On a:

XY possède une espérance $\Leftrightarrow \left(x_i y_j P(X=x_i, Y=y_j) \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ sommable.

$\Leftrightarrow \left(|x_i y_j| P(X=x_i) P(Y=y_j) \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ sommable (car X et Y sont indépendantes)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1) \forall i \geq 0, \sum_{j \geq 0} |x_i y_j| P(X=x_i) P(Y=y_j) < \infty \\ 2) \sum_{i \geq 0} \left(\sum_{j \geq 0} |x_i y_j| P(X=x_i) P(Y=y_j) \right) < \infty \end{cases}$$

1) Soit $i \geq 0$.

Par que la série $\sum_{j \geq 0} |x_i| \cdot |y_j| P(X=x_i) P(Y=y_j)$ CV, il suffit que

la série $\sum_{j \geq 0} |y_j| P(Y=y_j)$ CV.

Ce qui est vrai car Y possède une espérance.



2) $\sum_{i \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |x_i y_j| P(X=x_i) P(Y=y_j) \right) \text{ CV ?}$

$$\sum_{i \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |x_i| |y_j| P(X=x_i) P(Y=y_j) \right) \text{ CV} \Leftrightarrow \sum_{i \geq 0} |x_i| P(X=x_i) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |y_j| P(Y=y_j) \right) \text{ CV}$$

Ce qui est vrai car la série $\sum_{i \geq 0} |x_i| P(X=x_i)$ CV, puisque X possède une espérance.



Ainsi, XY possède une espérance



Rappel

i) (X, Y) possède une espérance si et si $\left(x_i y_j P(X=x_i, Y=y_j) \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

ii) Dans ce cas, on a :

$$E(XY) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} x_i y_j P(X=x_i, Y=y_j)$$

On a XY posséder une espérance, alors:

$$E(XY) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} x_i y_j P(X=x_i, Y=y_j)$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} x_i y_j P(X=x_i, Y=y_j) \right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{car la famille réelle} \\ \text{est sommable} \end{array} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} x_i y_j P(X=x_i) P(Y=y_j) \right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } X \text{ et } Y \\ \text{sont indépendantes} \end{array} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(x_i P(X=x_i) \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} y_j P(Y=y_j)}_{= E(Y)} \right)$$

$$= E(Y) \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{+\infty} x_i P(X=x_i)}_{= E(X)}$$

$$= E(X) E(Y)$$



Corollaire 6

Soit $n \geq 2$.

Si $X_1, \dots, X_n$ des var aléatoires indépendantes et possédant des espérances, alors leur produit $(X_1 \dots X_n)$ possède aussi une espérance, et on a:

$$E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n E(X_i)$$

Démo

Par récurrence sur $n \geq 2$, via la prop 5 et l'indépendance héritée.
(Détaillez chez-vous)

7) Moments - Variances

Déf 1 (Rappel)

X var et $k \in \mathbb{N}^*$.

Le moment d'ordre k de X est $E(X^k)$, sous réserve d'existence.

NB

- 1) X possède un moment d'ordre $k \Leftrightarrow E(X^k)$ existe.
- 2) X possède un moment d'ordre 1 $\Leftrightarrow E(X)$ existe.
- 3) X possède un moment d'ordre 2 $\Leftrightarrow E(X^2)$ existe.

Prop 2

X var.

- 1) Si X possède un moment d'ordre 2, alors X possède une espérance.
- 2) En général, Si X possède un moment d'ordre k , alors X possède tout moment d'ordre inférieur à k .

Démo

- 1) Supposons que $E(X^2)$ existe et que $E(X)$ existe.

Soit ! On a $|X| \leq \frac{X^2 + 1}{2}$

Or $E(X^2)$ et $E(1)$ existent alors $\frac{X^2 + 1}{2}$ possède aussi une espérance.

Par suite $|X|$ possède une espérance.

Càd X possède une espérance. $\square$

2) Voir TD_Partie 3_Exercice 1

$\square$

Corollaire 3

Si X possède un moment d'ordre k , alors il en est de même pour $(X+a)$, pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Démo

Supp que $E(X^k)$ existe, et vérif que $E((X+a)^k)$ existe.

$$\text{On a } (X+a)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i a^{k-i} X^i$$

(Prop 2) $\Rightarrow (\forall 0 \leq i \leq k, X^i \text{ possède une espérance})$

D'où la combinaison linéaire $\left(\sum_{i=0}^k C_k^i a^{k-i} X^i \right)$ possède aussi une espérance.

Càd $E((X+a)^k)$ existe.

$\square$

Prop et Déf 4

Soit X une var possédant un moment d'ordre 2; (càd $E(X^2)$ existe)

1) $E((X - E(X))^2)$ existe.

2) La variance de X est :

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

3) L'écart-type de X est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Démo

1) $E((X - E(X))^2)$ existe.

On a X possède un moment d'ordre 2.

Alors $(X - E(X))$ possède aussi un moment d'ordre 2.

Càd $E((X - E(X))^2)$ existe.

Prop 5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Si X et Y possèdent un moment d'ordre 2, alors on a :

1) XY possède une espérance.

$$2) |E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)} \sqrt{E(Y^2)}$$

Démo

Supp que X et Y possèdent un moment d'ordre 2.

1) Montrer que XY possède une espérance.

Càd que $E(|XY|)$ existe.

$$\text{On a } |XY| \leq \frac{X^2 + Y^2}{2}$$

Or X^2 et Y^2 possèdent des espérances.

Alors $\frac{x^2 + y^2}{2}$ possède une espérance.

D'où $|xy|$ possède une espérance. $\square$

$$2) |E(xy)| \leq \sqrt{E(x^2)} \sqrt{E(y^2)} ?$$

$$\text{On a } \forall t \in \mathbb{R}, E((tX + Y)^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, E(t^2 X^2 + 2tXY + Y^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall t \in \mathbb{R}, E(X^2) \cdot t^2 + 2E(XY)t + E(Y^2) \geq 0} \quad (\Sigma)$$

Cas 1: Si $E(X^2) \neq 0$

$$\text{On aura alors que } \Delta = 4(E(XY))^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \leq 0$$

$$\Rightarrow (E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)} \sqrt{E(Y^2)}} \quad \square$$

Cas 2: Si $E(X^2) = 0$

$$\forall t \in \mathbb{R}, at + b \geq 0$$

$$(\Sigma) \text{ devient: } \boxed{\forall t \in \mathbb{R}, 2E(XY)t + E(Y^2) \geq 0}$$

$$\text{D'où } E(XY) = 0$$

Car sinon, la fonction $t \mapsto 2E(XY)t + E(Y^2)$ changerait de signe.

Ainsi, l'inégalité $|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)} \sqrt{E(Y^2)}$ est vérifiée. $\square$

$$A \leq 0$$

$$A \rightarrow f \dots$$

Prop et def 6

Soient X et Y deux var possédant un moment d'ordre 2.

1) Le var $(X - E(X))(Y - E(Y))$ possède une espérance.

2) $E((X - E(X))(Y - E(Y)))$ s'appelle la Covariance de X et Y , et se note $C(X, Y)$.

$$3) C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$4) |C(X, Y)| \leq \sigma(X) \sigma(Y)$$

Démo

Supp qu. X et Y deux var possédant un moment d'ordre 2.

1) Le var $(X - E(X))(Y - E(Y))$ possède une espérance?

Puis X et Y deux var possédant un moment d'ordre 2

$\Rightarrow (X - E(X))$ et $(Y - E(Y))$ possèdent un moment d'ordre 2.

$\Rightarrow (X - E(X))(Y - E(Y))$ possède une espérance $\square$

3) $C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$? (voir en Partie 2)

$\square$

4) $|C(X, Y)| \leq \sigma(X) \sigma(Y)$?

$$\begin{aligned} |C(X, Y)| &= \left| E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))) \right| \\ &\leq \sqrt{E((X - E(X))^2)} \sqrt{E((Y - E(Y))^2)} \quad \left(\text{inégalité de C-Schw} \right) \end{aligned}$$

$$= \sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}$$

$$= \sigma(X) \sigma(Y) \quad \square$$

Prop et déf 7

Soient X et Y deux var possédant un moment d'ordre 2, tels que $V(X) \neq 0$ et $V(Y) \neq 0$.

1) Le Coefficient de corrélation de X et Y est :

$$\rho(X, Y) = \frac{C(X, Y)}{\sigma(X) \sigma(Y)}$$

2) $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$.

Démo

2) $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$?

On a $|C(X, Y)| \leq \sigma(X) \sigma(Y)$

$$\Rightarrow \left| \frac{C(X, Y)}{\sigma(X) \sigma(Y)} \right| \leq 1$$

Donc $|\rho(X, Y)| \leq 1 \quad \square$

Prop 8

Si X et Y possèdent un moment d'ordre 2 alors :

1) $X+Y$ possède aussi un moment d'ordre 2.

2) $V(X+Y) = V(X) + 2C(X, Y) + V(Y)$

Démo

Supp que X et Y possèdent un moment d'ordre 2.

1) Montrer que $X+Y$ possède aussi un moment d'ordre 2.

On a :

$X+Y$ possède aussi un moment d'ordre 2 $\Leftrightarrow E((X+Y)^2)$ existe

$$\Leftrightarrow E(X^2 + Y^2 + 2XY) \text{ existe}$$

Ce qui est vrai car X^2 et Y^2 possèdent des espérances, vu que

X et Y possèdent un moment d'ordre 2, et que (XY) possède une espérance. $\square$

$$2) V(X+Y) = V(X) + 2C(X,Y) + V(Y) ?$$

Déjà prouvée en partie 2. $\square$

Prop 9

Si X et Y possèdent un moment d'ordre 2 et indépendantes, alors

$$1) C(X,Y) = 0$$

$$2) V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Démo

Vu en partie 2. $\square$

Corollaire 10

Soit $n \geq 1$.

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des var indépendantes et possédant un moment d'ordre 2, alors $\sum_{i=1}^n X_i$ aussi, et on a :

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$$

Démo

Par récurrence sur $n \geq 1$ et via prop 9 et l'indépendance héritée. $\square$

Prop (Variances des var discrètes usuelles)

X	$X = C$ Constante	$X \sim \mathcal{U}(n)$	$X \sim \mathcal{B}(p)$	$X \sim \mathcal{B}(n, p)$	$X \sim \mathcal{G}(p)$	$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$
$E(X)$	C	$\frac{n+1}{2}$	p	np	$\frac{1}{p}$	λ
$V(X)$	0	$\frac{n^2-1}{12}$	$p(1-p)$	$np(1-p)$	$\frac{1-p}{p^2}$	λ

Démo

Il reste les cas $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Les autres sont démontrées en partie 2.

1) Supp que $X \sim \mathcal{G}(p)$.

i) M. que $E(X) = \frac{1}{p}$



ii) M qn $V(x) = \frac{1-p}{p^2}$



2) Supp qn $X \sim P(\lambda)$

i) M qn $E(X) = \lambda$



ii) M qn $V(X) = \lambda$



8) Fonction génératrice d'une var discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$

Déf 1

Soit X une var discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La fonction génératrice de X est :

$$\begin{array}{ccc} G_X : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & G_X(t) = E(t^X) \end{array}$$

Prop 2

Soit X une var discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n$$

Démo

Soit $t \in \mathbb{R}$.

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$, alors :

$$G_X(t) = E(t^X) = f(X); \text{ où } f(x) = t^x$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) P(X=n) \quad (\text{Formule de transfert})$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \cdot P(X=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n$$

□

Prop 3

Soit X une var discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On rappelle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n$$

- 1) Le rayon de convergence de cette série entière est > 1 .
- 2) $G_X(1) = 1$
- 3) Cette série entière converge normalement sur $[-1, 1]$.
- 4) G_X est continue sur $[-1, 1]$.
- 5) G_X est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$.

Démo

$$\text{On a : } (\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n)$$

- 1) Le rayon de convergence de cette série entière est > 1 , car la suite $(P(X=n))_{n \geq 0}$ est bornée. $\square$

2) $G_X(1) = 1$?

$$\begin{aligned} G_X(1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) 1^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) \quad (\text{car } X(\Omega) = \mathbb{N}) \\ &= 1 \end{aligned} \quad \square$$

3) Cette série entière converge normalement sur $[-1, 1]$?

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [-1, 1]$. On a :

$$|P(X=n) t^n| = P(X=n) |t|^n$$

$$\leq P(X=n) \quad (\text{car } |t| \leq 1)$$

ne dépend pas de t

Or la série $\sum_{n \geq 0} P(X=n)$ converge (de somme 1)

Alors la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} P(X=n) t^n$ CN sur $[-1, 1]$. □

4) G_X est continue sur $[-1, 1]$?

On a $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, t \mapsto P(X=n) t^n \text{ est continue sur } [-1, 1]. \\ \text{La série de fonctions } \sum_{n \geq 0} P(X=n) t^n \text{ CU sur } [-1, 1]. \end{cases}$

D'où la fonction somme $G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n$ est continue sur $[-1, 1]$. □

5) G_X est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$?

Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} P(X=n) t^n$.

La somme, qui est G_X , est alors de classe C^∞ sur $]-R, R[$.

Or $]-1, 1[\subset]-R, R[$, car $R \geq 1$

D'où G_X est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$. □

Prop 4

Soit X une var discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La connaissance de la loi de X est équivalente à la connaissance de sa fonction génératrice.

Démo

Soit X une var discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1) Supposons connaître la loi de X .

Montrons qu'on connaît sa fonction génératrice.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X=n)$ est alors connue.

D'où $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n$ sera aussi connue. $\square$

2) Supposons connaître la fonction génératrice de X .

Montrons qu'on connaît sa loi.

On a $(\forall t \in]-1, 1[), G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n$ et $G_X \in C^\infty$ sur $]-1, 1[$.

Alors : $\left(\forall n \in \mathbb{N}, P(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!} \right)$

D'où la connaissance de la loi de X . $\square$

Prop 5

Soit X une var discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X sa fonction génératrice.

1) i) X possède une espérance $\Leftrightarrow G_X$ est dérivable en 1

ii) Dans ce cas, $G_X'(1) = E(X)$

2) i) X possède un moment d'ordre 2 ssi G_X est deux fois dérivable en 1.

ii) Dans ce cas, $G_X''(1) = E(X(X-1))$

À retenir

1) Il suffit que le RCV $R > 1$ de la SE $\sum_{n \geq 0} P(X=n)t^n$ pour que $E(X)$ et $E(X^2)$ existent (donc $V(X)$ existe).

2) Disposant de G_X , qui est deux fois dérivable en 1, on tire $G_X''(1) = E(X(X-1))$, puis on tire $E(X^2)$ et par suite $V(X)$.

NB

Il faut être capable de déterminer les fonctions génératrices des lois usuelles discrètes, et de retrouver par la suite leurs espérances et variances. (Traiter l'exercice ci-après)

Exercice résolu

- 1) Déterminer les fonctions génératrices des lois discrètes usuelles.
Préciser pour chacune le rayon de convergence, et vérifier qu'il est supérieur strictement à 1.
- 2) Justifier que $E(X)$ et $V(X)$ existent pour chacune de ces lois usuelles, et retrouver leurs valeurs.

Solution

1) i) Soit $X \sim G(p)$

$$\text{On a : } \begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, P(X=n) = p(1-p)^{n-1} \end{cases}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) t^n & (X(\Omega) = \mathbb{N}^*) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} t^n & (R=?) \end{aligned}$$

$$\text{D'Alembert} \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{1-p}}$$

$$\text{et } \boxed{R > 1}, \text{ car } 1-p < 1$$

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty} ((1-p)t)^{n-1} ; \quad \forall |t| < \frac{1}{1-p} = R \\ &= \frac{p}{1-p} \cdot \frac{(1-p)t}{1 - (1-p)t} \end{aligned}$$

$$\forall t \in]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}[, G_X(t) = \frac{p t}{1 - (1-p)t}$$



iii) Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n$$

On a :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ \forall n \in \mathbb{N}, P(X=n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \end{cases}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n & (X(\Omega) = \mathbb{N}^*) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} t^n & (R=?) \end{aligned}$$

D'Alembert $\Rightarrow R = +\infty$

et $R > 1$

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} t^n \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda t} \end{aligned}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$$



iii) Soit $X \sim B(n, p)$

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) t^k$$

$$\text{On a : } \begin{cases} X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \\ \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \end{cases}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{k=0}^n P(X=k) t^k & (X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket) \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} t^k \end{aligned}$$

$$R = ?$$

Cette série entière converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ (car polynomiale)

D'où $R = +\infty$

et on a aussi $R > 1$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{k=0}^n P(X=k) t^k \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} t^k \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k (pt)^k \cdot (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = (pt + (1-p))^n$$

iv) Soit $X \sim B(p)$

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) t^k$$

$$\text{On a : } \begin{cases} X(\Omega) = \{0, 1\} \\ P(X=0) = 1-p \text{ ; } P(X=1) = p \end{cases}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$G_X(t) = \underbrace{P(X=0)}_{=1-p} \cdot t^0 + \underbrace{P(X=1)}_{=p} \cdot t^1 \quad (X(\Omega) = \{0, 1\})$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = pt + (1-p)$$



2) Justifier que $E(X)$ et $V(X)$ existent pour chacune de ces lois usuelles, et retrouver leurs valeurs.

D'abord, pour chacune de ces lois usuelles, $R > 1$ et la fonction génératrice de classe C^∞ sur $] -R, R[$, donc elle est dérivable et ainsi deux fois dérivable en 1.

Par suite $E(X)$ et $V(X)$ existent.

iv) Soit $X \sim B(n, p)$

$$\underline{E(X) = ?}$$

$$\text{On a } E(X) = G_X'(1)$$

$$G_X(t) = (pt + (1-p))^n \Rightarrow G_X'(t) = n p (pt + (1-p))^{n-1}$$

$$\Rightarrow G_X'(1) = np$$

Donc $E(X) = np$

$V(X) = ?$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= E(X^2) - n^2 p^2$$

2^{ème} partie:

$$G_X''(1) = E(X(X-1))$$

$$G_X'(t) = np (pt + (1-p))^{n-1}$$

$$G_X(t) = (pt + (1-p))^n \Rightarrow G_X''(t) = n(n-1)p^2 (pt + (1-p))^{n-2}$$

$$\Rightarrow G_X''(1) = n(n-1)p^2$$

Donc $E(X(X-1)) = n(n-1)p^2$

Alors :

$$E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X)$$

$$= n(n-1)p^2 + np$$

Donc

$$V(X) = E(X^2) - n^2 p^2$$

$$= n(n-1)p^2 + np - n^2 p^2$$

$$= -np^2 + np$$

$$V(X) = np(1-p) \quad \square$$

Prop 6

Soient $X_1, \dots, X_n$ des var discrètes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes.

On a :

$$G_{X_1 + \dots + X_n} = G_{X_1} \dots G_{X_n}$$

Démo

Pot $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} G_{X_1 + \dots + X_n}(t) &= E(t^{X_1 + \dots + X_n}) \\ &= E(t^{X_1} \dots t^{X_n}) \end{aligned}$$

Or $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors il en est de même pour les var $t^{X_1}, \dots, t^{X_n}$ par indépendance héritée.

$$\text{Alors } E(t^{X_1} \dots t^{X_n}) = E(t^{X_1}) \dots E(t^{X_n})$$

D'où

$$G_{X_1 + \dots + X_n}(t) = G_{X_1}(t) \dots G_{X_n}(t)$$



9) Inégalité de Jensen

Prop

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Convexe.

Soit X une var discrète telle X et $f(X)$ possèdent des espérances.

On a:

$$f(E(X)) \leq E(f(X))$$

Démo

On fera la démonstration dans le cas où $X(\Omega)$ est fini.

Notons $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, où les x_i distincts deux à deux.

On a:

$$f(E(X)) = f\left(\sum_{i=1}^n P(X=x_i) \cdot x_i\right)$$

$$\text{On } \begin{cases} \forall 1 \leq i \leq n, P(X=x_i) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^n P(X=x_i) = 1 \\ f \text{ Convexe sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Alors } f\left(\sum_{i=1}^n P(X=x_i) \cdot x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(X=x_i) \cdot f(x_i)$$

d'où :

$$f(E(X)) \leq \sum_{i=1}^n P(X=x_i) \cdot f(x_i)$$

$$= E(f(X)) \quad (\text{d'après la formule du transfert})$$

□

10) Loi de la somme de deux var discrètes indépendantes

Prop

Soient X et Y deux var discrètes et indépendantes.

Notons $\mathcal{D} = X(\Omega)$, $\mathcal{D}' = Y(\Omega)$ et $S = X + Y$.

On a:

1) S est aussi une var discrète.

2) L'ensemble des valeurs possibles est

$$\Delta = S(\Omega) = \{u+v / u \in \mathcal{D} \text{ et } v \in \mathcal{D}'\}$$

3) La loi de S est donnée par:

$$\forall s \in \Delta, P(S=s) = \sum_{u \in \mathcal{D}} P(X=u) P(Y=s-u)$$

$$\forall s \in \Delta, P(S=s) = \sum_{v \in \mathcal{D}'} P(X=s-v) P(Y=v)$$

Formules dites de convolution discrètes des lois de X et Y

Démo

Handwritten proof of the discrete convolution formula for the sum of two independent discrete random variables. The steps are as follows:

- $S = X + Y$
- $P(S=s) = P(X+Y=s)$
- Using the law of total probability (LPT) and the fact that X and Y are independent, we have:
$$P(S=s) = \sum_{u \in \mathcal{D}} P(X+Y=s, X=u)$$
$$= \sum_{u \in \mathcal{D}} P(X=u, Y=s-u)$$
$$= \sum_{u \in \mathcal{D}} P(X=u) \cdot P(Y=s-u)$$

11) Modes de convergences

HPF : Hors programme français

a) Convergence en probabilité

Déf

Soit $(X_n)_n$ une suite de var.

Soit X une var.

HPF

On dit que $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X si et si :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \right) = 0$$

Prop

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Soit X une var.

HPF

Si $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$

Alors $(f_n(X))_n$ converge en probabilité vers $f(X)$.

b) Convergence en loi

Déf

Soit $(X_n)_n$ une suite de var.

Soit X une var.

$\mathcal{D}$ étant l'ensemble des points de discontinuité de F_X .

HPF

On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X si et seulement si :

$(F_{X_n})_n$ converge simplement vers F_X sur $\mathbb{R} \setminus \mathcal{D}$

Càd :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{D}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n \leq x) = P(X \leq x)$$

Prop

Supposons que $(X_n)_n$ et X sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

HPF

1) $(X_n)_n$ converge en loi vers X

2) $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$

Exercice classique à savoir résoudre

Soit $\lambda > 0$.

Soit $(p_n)_n$ une suite de réels positifs vérifiant :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda$$

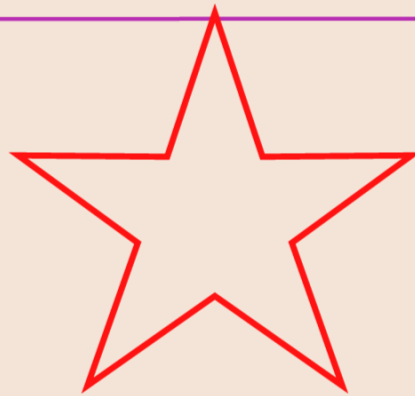
$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n \sim B(n, p_n)$$

Montrer que $(X_n)_n$ converge en loi vers une var suivant une loi de Poisson de paramètre λ .

Càd :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Solution



Prop

HPF

- 1) La convergence en probabilité implique la convergence en loi.
- 2) La réciproque est en général fausse.

12) Loi faible des grands nombres

À savoir !



Si les var X et Y ont la même loi alors :

$$E(X) = E(Y) \quad \text{et} \quad V(X) = V(Y)$$

Prop (Loi faible des grands nombres)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de var indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2.

Notons pour tout $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$

Soit μ l'espérance commune à toutes les var X_n .

On a :

$\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers μ .

Càd :



$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Démo

Il faut : $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers μ .

Soit alors $\varepsilon > 0$.

$$\text{Il faut : } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Soit $n \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned} E\left(\frac{S_n}{n}\right) &= \frac{1}{n} E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu \quad (\text{car } \forall k, E(X_k) = \mu) \\ &= \mu \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) &= P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \\ &\leq \frac{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} \quad (\text{Inég de B-Tch}) \\ &= \frac{1}{n^2} V(S_n) \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) \left(\begin{array}{l} \text{Car } X_1, \dots, X_n \\ \text{sont indépendantes} \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} \sum_{k=1}^n V(X_{\underline{1}}) \left(\begin{array}{l} \text{les } X_k \text{ ont la} \\ \text{même loi} \end{array} \right)$$

$$= \frac{n V(X_{\underline{1}})}{n^2 \varepsilon^2}$$

$$\text{D'où } \left(\forall n \geq 1, P\left(\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{V(X_{\underline{1}})}{n \varepsilon^2} \right)$$

Enfin :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \varepsilon \right) = 0$$



FIN