

ECOLE POLYTECHNIQUE
CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES B (X)
Session 2024 - Filières MP - MPI

m.laamoum2@gmail.com ¹

Première partie

On note S l'ensemble des solutions de (1) sur \mathbb{R} .

1 ▷

(1a) D'après le théorème de Cauchy linéaire, les deux problèmes de Cauchy

$$(P_1) \begin{cases} y'' + qy = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (P_2) \begin{cases} y'' + qy = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

admettent respectivement une unique solution y_1 et y_2 dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Le Wronskien de la famille (y_1, y_2) en 0 vaut $W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ ainsi (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de (1), donc c'est une base de l'ensemble S , qui est de dimension 2.

Par suite $S = \text{Vect}(y_1, y_2)$ est l'ensemble des solutions de (1) dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

(1b) Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$, on a

$$\varphi'(t) = y_1(t)y_2''(t) - y_1''(t)y_2(t) = y_1(t)(q(t)y_2(t)) - y_1''(t)(q(t)y_1(t)) = 0$$

donc φ est constante sur \mathbb{R} et $\varphi(t) = \varphi(0) = W(0) = 1$, d'où $\forall t \in \mathbb{R}, y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = 1$.

2 ▷ L'application $\varphi_T : t \mapsto y(t+T)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_T''(t) = y''(t+T) = -q(t+T)y(t+T)$$

Or q est T -périodique, donc:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_T''(t) = -q(t)y(t+T) = -q(t)\varphi_T(t)$$

ce qui démontre que φ_T est solution de (1) sur \mathbb{R} .

D'après la question 1.a, l'application φ_T est donc combinaison linéaire de y_1 et y_2 , soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\varphi_T = \alpha y_1 + \beta y_2.$$

En évaluant en 0 cette égalité, ainsi que celle obtenue par dérivation $\varphi_T' = \alpha y_1' + \beta y_2'$, on obtient: $\begin{cases} \varphi_T(0) = y(T) = \alpha \\ \varphi_T'(0) = y'(T) = \beta \end{cases}$.

D'où le résultat : $\forall t \in \mathbb{R}, y(t+T) = y(T)y_1(t) + y'(T)y_2(t)$.

3 ▷ On note Φ_T l'endomorphisme défini par

$$\Phi_T : \begin{cases} S & \rightarrow S \\ y & \mapsto (\varphi_T : t \mapsto y(t+T)) \end{cases}$$

¹<https://tinyurl.com/2qyzrbd>

i) \Leftrightarrow ii) L'existence d'une application non nulle y vérifiant (i) est équivalent à μ est valeur propre de Φ_T .
D'après la question 2) on a

$$\text{Mat}_{(y_1, y_2)}(\Phi_T) = \begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\chi_{\Phi_T}(X) = X^2 - (y_1(T) + y_2'(T))X + (y_1(T)y_2'(T) - y_1'(T)y_2(T)).$$

D'après la question 1.b) on a $y_1(T)y_2'(T) - y_1'(T)y_2(T) = 1$, donc

$$\chi_{\Phi_T}(X) = X^2 - (y_1(T) + y_2'(T))X + 1.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{i)} &\Leftrightarrow \mu \in \text{Sp}(\Phi_T) \\ &\Leftrightarrow \chi_{\Phi_T}(\mu) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mu^2 - (y_1(T) + y_2'(T))\mu + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{ii)} \end{aligned}$$

i) \Leftrightarrow iii)

Supposons **i)**. Soit $y \in S$ non nulle telle que: $\forall t \in \mathbb{R}, y(t+T) = \mu y(t)$, et posons pour tout $t \in \mathbb{R}, u(t) = e^{-\lambda t} y(t)$.
Donc $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = e^{\lambda t} u(t)$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t+T) = e^{-\lambda t} e^{-\lambda T} y(t+T) = e^{-\lambda t} \frac{1}{\mu} \cdot \mu y(t) = e^{-\lambda t} y(t) = u(t),$$

u est donc T -périodique, ainsi **i)** implique **iii)**.

Réciproquement si **iii)** est vraie, alors u est T -périodique et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t+T) = e^{\lambda T} e^{\lambda t} u(t+T) = e^{\lambda T} e^{\lambda t} u(t) = \mu y(t),$$

et y est une solution non nulle de (1) par hypothèse: d'où **i)**.

Ce qui donne l'équivalence des trois assertions.

4 \triangleright

(4a) On a $\text{Sp}(\Phi_T) = \{\mu_1, \mu_2\}$ avec $\mu_1 \neq \mu_2$. Φ_T est diagonalisable et S admet une base (y_1, y_2) formée de vecteurs propres de Φ_T .

La question 3. assure l'existence de deux fonctions w_1, w_2 de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et T -périodiques telles que $y_1 : t \mapsto e^{\lambda_1 t} w_1(t)$ et $y_2 : t \mapsto e^{\lambda_2 t} w_2(t)$.

La forme de χ_{Φ_T} donne $\mu_1 \cdot \mu_2 = 1$ et on a $\mu_1 = e^{\lambda T}$, donc $\mu_2 = e^{-\lambda T}$, par suite $\lambda_1 = \lambda$ et $\lambda_2 = -\lambda$.

Par conséquent, pour toute solution y de (1) il existe α et β tels que :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = \alpha e^{\lambda t} w_1(t) + \beta e^{-\lambda t} w_2(t)}.$$

(4b) Si $\mu_1 = \mu_2$, alors par les relations coefficients-racines on a: $\mu_1^2 = 1$, donc: $\mu_1 \in \{1, -1\}$.

Soit y vecteur propre de Φ_T associé à μ_1 , donc y vecteur propre de Φ_T^2 associé à 1, alors $\forall t \in \mathbb{R}, y(t+2T) = y(t)$, donc y une solution non nulle et $2T$ -périodique de (1) $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Deuxième partie

5 ▷

(5a) On suppose qu'il existe un réel $C \geq 0$ tel que pour tout $x \in V$, $\|dh(x)\| \leq C$.

Soit γ l'application définie sur $[0, 1]$ par $t \mapsto x_1 + t(x_2 - x_1)$. V est convexe donc $\gamma([0, 1]) \subset V$ et γ est de classe \mathcal{C}^1 donc $h \circ \gamma$ est une fonction vectorielle de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, et par la formule de la différentielle de la composée de deux fonctions on a

$$(h \circ \gamma)'(t) = dh(\gamma(t)) \circ \gamma'(t) = (dh(\gamma(t)))(x_2 - x_1)$$

donc

$$h(x_2) - h(x_1) = \int_0^1 (h \circ \gamma)'(t) dt = \int_0^1 (dh(\gamma(t)))(x_2 - x_1) dt,$$

et par l'inégalité des normes :

$$\|h(x_2) - h(x_1)\| \leq \int_0^1 \|(dh(\gamma(t)))(x_2 - x_1)\| dt$$

l'application linéaire $dh(\gamma(t))$ est continue donc

$$\|(dh(\gamma(t)))(x_2 - x_1)\| \leq \|dh(\gamma(t))\| \cdot \|x_2 - x_1\| \leq C \cdot \|x_2 - x_1\|$$

d'où $\|h(x_2) - h(x_1)\| \leq C \cdot \|x_2 - x_1\|$.

(5b) Considérons l'application $h = \text{Id}_E - f$.

On a $h \in \mathcal{C}^1(U, E)$ et

$$dh = df - d(\text{Id}_E) = df - \text{Id}_E = df - df(a)$$

par suite $dh(a) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Comme dh est continue en a , alors il existe $r_1 > 0$ tel que:

$$\forall x \in U \cap B(a, r_1), \|dh(x) - dh(a)\| = \|dh(x)\| \leq \frac{1}{2}$$

U est ouvert donc il existe $r_2 > 0$ tel que $B(a, r_2) \subset U$. Soit $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$, on a $\overline{B(a, r)} \subset U \cap B(a, r_1)$ et donc

$$\forall x \in \overline{B(a, r)}, \|dh(x)\| \leq \frac{1}{2}$$

la question précédente appliquée au convexe $\overline{B(a, r)}$ donne :

$$\forall (x_1, x_2) \in \overline{B(a, r)}^2, \|h(x_1) - h(x_2)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|.$$

Par l'inégalité triangulaire (bis) on a

$$\begin{aligned} \forall (x_1, x_2) \in \overline{B(a, r)}^2, \|h(x_1) - h(x_2)\| &= \|(x_1 - x_2) - (f(x_1) - f(x_2))\| \\ &\geq \|x_1 - x_2\| - \|f(x_1) - f(x_2)\| \end{aligned}$$

donc $\forall (x_1, x_2) \in \overline{B(a, r)}^2, \|f(x_1) - f(x_2)\| \geq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|$.

(5c) Soit $x \in B(a, r)$ et $h \in \ker(df(x))$ donc $df(x)(h) = 0_E$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que $\|\varepsilon h\| \leq r - \|x - a\|$.

Pour tout $t \in]0, \varepsilon]$ on a

$$\|x + th - a\| \leq \|x - a\| + \|th\| \leq \|x - a\| + \|\varepsilon h\| \leq r$$

donc $x + th \in \overline{B(a, r)}$ et par la question précédente on a

$$\left\| \frac{1}{t} (f(x + th) - f(x)) \right\| \geq \frac{\|x + th - x\|}{2t} = \frac{\|h\|}{2}$$

comme $\frac{1}{t} (f(x + th) - f(x)) \xrightarrow{t \rightarrow 0} df(x)(h) = 0_E$, donc $\|h\| = 0$ et $h = 0_E$.

Ainsi $\ker(df(x)) = \{0_E\}$ et $df(x)$ est injective.

6 ▷ Soit $y_0 \in E$ tel que $\|y_0 - f(a)\| \leq \frac{r}{4}$

(6a) Les fonctions f et $\|\cdot\|$ sont continues donc g est continue sur le compact $\overline{B(a,r)}$ (car fermé et borné en dimension finie) donc admet un minimum et l'atteint en un x_0 sur $\overline{B(a,r)}$.

Montrons que ce minimum est atteint sur $B(a,r)$. Soit x vérifiant $\|x - a\| = r$, alors

$$\|y_0 - f(x)\| = \|y_0 - f(a) + f(a) - f(x)\| \geq \|f(a) - f(x)\| - \|y_0 - f(a)\|$$

comme $\|y_0 - f(a)\| \leq \frac{r}{4}$ et $\|f(a) - f(x)\| \geq \frac{1}{2}\|a - x\|$ donc

$$\|y_0 - f(x)\| \geq \frac{1}{2}\|x - a\| - \frac{r}{4} = \frac{r}{4}$$

par suite

$$\|y_0 - f(a)\| \leq \frac{r}{4} \leq \|y_0 - f(x)\|$$

donc $g(x) \geq g(a)$.

Si $\|x_0 - a\| = r$ alors $g(a) = g(x_0)$ et le minimum est aussi atteint en a . On en déduit que g atteint son minimum en un point de $B(a,r)$.

(6b) Par l'absurde, supposons que $y_0 \neq f(x_0)$.

D'après la question 5.c $df(x_0)$ est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie, il est donc bijectif.

Soit $h \in E \setminus \{0\}$ tel que $df(x_0)(h) = (y_0 - f(x_0))$.

Pour tout $0 < t < \frac{r - \|x_0 - a\|}{\|h\|}$ (car $x_0 \in B(a,r)$) on a $x_0 + th \in \overline{B(a,r)}$, la différentiabilité de f donne

$$f(x_0 + th) = f(x_0) + df(x_0).th + \|th\|\varepsilon(th)$$

avec $\varepsilon(th) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$. Donc

$$\begin{aligned} \|y_0 - f(x_0 + th)\| &= \|y_0 - f(x_0) - tdf(x_0)(h) - t\varepsilon(th)\| \\ &= \|(1-t)(y_0 - f(x_0)) - t\varepsilon(th)\| \\ &\leq (1-t)\|y_0 - f(x_0)\| + t\|\varepsilon(th)\| \end{aligned}$$

on a $\|y_0 - f(x_0)\| > 0$, alors pour t suffisamment proche de 0 on a $\|\varepsilon(th)\| < \|y_0 - f(x_0)\|$ et donc

$$\|y_0 - f(x_0 + th)\| < \|y_0 - f(x_0)\|$$

donc $g(x_0 + th) < g(x_0)$, ce qui est contredit le fait que g admet un minimum en x_0 sur $\overline{B(a,r)}$.

D'où $\boxed{y_0 = f(x_0)}$.

7 ▷

(7a) On a $W = B(f(a), \frac{r}{4})$ est une boule ouverte donc c'est un ouvert de E .

Comme f est continue de U vers E alors $f^{-1}(W)$ est un ouvert de U , il existe donc un ouvert A de E tel que $f^{-1}(W) = U \cap A$, par suite $V = U \cap A \cap B(a,r)$. Ainsi V est un ouvert de E .

(7b) $f|_V : \begin{cases} V & \longrightarrow & W \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$

- On a $V = f^{-1}(W) \cap B(a,r)$ donc $f(V) \subset W$ et $f|_V$ est bien définie de V vers W .
- $f|_V$ est continue car f l'est.
- Surjectivité :

Soit $y_0 \in W$, alors $\|y_0 - f(a)\| \leq \frac{r}{4}$ et par la question 6 il existe $x_0 \in B(a,r)$ tel que $y_0 = f(x_0) \in W$, donc $x_0 \in V = f^{-1}(W) \cap B(a,r)$ et $y = f|_V(x_0)$ ainsi $\boxed{f|_V \text{ est surjective.}}$

- Injectivité :

Soit $x_1, x_2 \in V \subset \overline{B(a, r)}$, d'après 5.b on a $\|f(x_1) - f(x_2)\| \geq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$ donc $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$, ainsi

$f|_V$ est injective .

Par conséquent $f|_V$ est bijective .

- Continuité de $(f|_V)^{-1}$:

Soit $y_1, y_2 \in W$ et $x_1 = (f|_V)^{-1}(y_1)$, $x_2 = (f|_V)^{-1}(y_2) \in V \subset \overline{B(a, r)}$.

La question 5.b donne

$$\left\| (f|_V)^{-1}(y_1) - (f|_V)^{-1}(y_2) \right\| = \|x_1 - x_2\| \leq 2\|f(x_1) - f(x_2)\| = 2\|y_1 - y_2\|.$$

$(f|_V)^{-1}$ est 2-lipchitzienne donc elle est continue.

Ainsi $f|_V$ un homéomorphisme de V sur W .

Troisième partie

Rappels sur l'exponentielle de matrices :

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

- $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En particulier $\exp(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}) = I_n$.
- $\det(\exp(A)) = e^{\text{Tr}(A)}$.
- $\exp(A) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$
- $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(A)) = \{e^\lambda \mid \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\}$.
- Si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $V \in E_\lambda(A)$ alors $\exp(A)V = e^\lambda V$
- Si $B = PAP^{-1}$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ alors $\exp(B) = P \exp(A) P^{-1}$.
- $\exp(\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \text{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.
- si $AB = BA$ alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ et $A.\exp(B) = \exp(B).A$
- L'application $t \mapsto \exp(tA)$ est de classe \mathcal{C}^∞ et $\frac{d}{dt}(\exp(tA)) = A.\exp(tA) = \exp(tA).A$.

8 ▷

(8a) On sait que $\mathbb{C}[A]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ et $(\mathbb{C}[A], +, \times)$ est un anneau commutatif, par suite $(\mathbb{C}[A])^*$ est le groupe des unités de cet anneau. Donc $(\mathbb{C}[A])^*$ est un sous-groupe abélien de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.

(8b) • Par définition de $(\mathbb{C}[A])^*$ on a l'inclusion $(\mathbb{C}[A])^* \subset \mathbb{C}[A] \cap \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

- Soit $M \in \mathbb{C}[A] \cap \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$\chi_M(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} \text{ avec } \chi_M(0) = a_0 = (-1)^n \det(M) \neq 0$$

On écrit $\chi_M = XP + a_0$, avec $P \in \mathbb{C}[X]$. L'égalité $\chi_M(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ donne $I_n = -\frac{1}{a_0} P(M).M$.

On en déduit $M^{-1} = -\frac{1}{a_0} P(M)$, donc $M^{-1} \in \mathbb{C}[M] \subset \mathbb{C}[A]$ et $M \in (\mathbb{C}[A])^*$.

D'où l'égalité $\mathbb{C}[A] \cap \text{GL}_n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}[A])^*$.

9 ▷ Soit $M \in \mathbb{C}[A]$. On sait que $\exp(M) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} M^n$ est une matrice inversible et $(\exp(M))^{-1} = \exp(-M)$, donc

$\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

On a $\exp(M) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} M^n$, ce qui montre que $\exp(M)$ est limite d'une suite à valeurs dans $\mathbb{C}[A]$. Or $\mathbb{C}[A]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc c'est un fermé (il est donc stable par passage à la limite), on en déduit que $\exp(M) \in \mathbb{C}[A]$.

Ainsi: $\exp(M) \in \mathbb{C}[A] \cap \text{GL}_n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}[A])^*$, d'où $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset (\mathbb{C}[A])^*$.

10 ▷

(10a) Posons $\Phi : \begin{cases}]0, 1[\times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ (t, a) & \mapsto Z_a(t) \end{cases}$. Soient (t, a) et (t', a') dans $]0, 1[\times \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} (\Phi(t, a) = \Phi(t', a')) &\Leftrightarrow (Z_a(t) = Z_{a'}(t')) \\ &\Leftrightarrow (t + iat(1-t) = t' + iat'(1-t')) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = t' \\ at(1-t) = a't'(1-t') \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = t' \\ a = a' \end{cases} \quad ((t(1-t) = t'(1-t')) \neq 0 \text{ car } t \in]0, 1[) \\ &\Leftrightarrow (t, a) = (t', a') \end{aligned}$$

Ce qui prouve que l'application Φ est injective .

(10b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons pour tout $t \in [0, 1]$, $M(t) = Z_a(t)M_1 + (1 - Z_a(t))M_2$. C'est un élément de $\mathbb{C}[A]$ pour tout $t \in [0, 1]$, puisqu'il est combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{C}[A]$.

Considérons l'application $P : z \mapsto \det(zM_1 + (1-z)M_2)$. On a pour $z \in \mathbb{C}^*$

$$\begin{aligned} \det(zM_1 + (1-z)M_2) &= (-z)^n \det(M_1) \det\left(I_n - (1 - \frac{1}{z})(M_1^{-1}M_2)\right) \\ &= (-z)^n \det(M_2) \chi_{(M_1^{-1}M_2)}\left(1 - \frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

Comme $P(0) = \det(M_2) \neq 0$ et $P(1) = \det(M_1) \neq 0$, alors on a

$$\begin{aligned} P(z) = 0 &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{z} \in \text{Sp}(M_1^{-1}M_2) \\ &\Leftrightarrow z \in \left\{ \frac{1}{1-\lambda}, \lambda \in \text{Sp}(M_1^{-1}M_2) \setminus \{1\} \right\} \end{aligned}$$

L'ensemble $A = \left\{ \frac{1}{1-\lambda}, \lambda \in \text{Sp}(M_1M_2^{-1}) \setminus \{1\} \right\}$ est fini, Φ est injective donc l'ensemble $B = \{a \in \mathbb{R}, \exists t \in]0, 1[, Z_a(t) \in A\}$ est fini (éventuellement vide).

Soit $a > \max B$ si $B \neq \emptyset$ (et $a = 1$ si $B = \emptyset$) on a pour tout $t \in [0, 1]$, $\det M(t) \neq 0$ et $M(t) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

D'où l'existence a tel que $\forall t \in [0, 1], M(t) \in \mathbb{C}[A] \cap \text{GL}_n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}[A])^*$.

(10c) L'application $t \mapsto Z_a(t)$ est continue car polynomiale, donc l'application $t \mapsto M(t)$ est continue aussi, à valeurs dans $(\mathbb{C}[A])^*$ et vérifie: $M(0) = M_2, M(1) = M_1$. Cela montre que M_1 et M_2 sont reliés dans $(\mathbb{C}[A])^*$ par un chemin continu. Ceci étant valable pour tout couple d'éléments de $(\mathbb{C}[A])^*$, donc $(\mathbb{C}[A])^*$ est connexe par arcs.

11 ▷

(11a) Par application du résultat démontré dans la deuxième partie.

Considérons $\mathbb{C}[A]$ comme \mathbb{R} espace vectoriel et montrons que l'application $\exp : \mathbb{C}[A] \rightarrow (\mathbb{C}[A])^*$ est de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ et de différentielle en $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ égale à l'identité.

On choisit sur $\mathbb{C}[A]$ une norme $\|\cdot\|$ d'algèbre, elle vérifie : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ et $\|A^n\| \leq \|A\|^n$.

• Différentiabilité sur $\mathbb{C}[A]$:

Soit M et H dans $\mathbb{C}[A]$ tel que $\|H\| \leq 1$. M et H commutent, on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \exp(M+H) &= \exp(M)\exp(H) \\ &= \exp(M) \left(I_n + H + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k \right) \\ &= \exp(M) + \exp(M)H + \exp(M) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k \end{aligned}$$

remarquons que $H \mapsto \exp(M)H$ linéaire et

$$\left\| \exp(M) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k \right\| \leq \|\exp(M)\| \left\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \right\|$$

par continuité de la norme on a

$$\left\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H^k\|}{k!}$$

$\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre donc $\|H^k\| \leq \|H\|^k$ pour tout $k \geq 2$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \right\| &\leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H\|^k}{k!} \\ &\leq \|H\|^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \quad (\text{car } \|H\| \leq 1) \\ &\leq e \|H\|^2 \end{aligned}$$

et

$$\left\| \exp(M) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k \right\| \leq e \|\exp(M)\| \|H\|^2$$

ainsi $\exp(M) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k = o(H)$.

On en déduit que $\boxed{\exp(M+H) = \exp(M) + \exp(M)H + o(H)}$ et donc \exp est différentiable en M avec

$$\boxed{d \exp(M) : H \mapsto \exp(M).H}$$

- Classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{C}[A]$:

La fonction \exp est différentiable sur $\mathbb{C}[A]$, donc elle est continue sur $\mathbb{C}[A]$.

Montrons que $d \exp$ est continue de $\mathbb{C}[A]$ vers $\mathcal{L}(\mathbb{C}[A])$, sur $\mathcal{L}(\mathbb{C}[A])$ on utilise la norme d'opérateur associée à une norme sur le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{C}[A]$.

Soit B, C et H dans $\mathbb{C}[A]$ on a

$$\|(d \exp(B) - d \exp(C))(H)\| = \|(\exp(B) - \exp(C)).H\| \leq \|\exp(B) - \exp(C)\| \|H\|$$

donc la norme d'opérateur vérifie

$$\|d \exp(B) - d \exp(C)\| \leq \|\exp(B) - \exp(C)\|$$

ce qui prouve la continuité de $d \exp$.

(pour $H = I_n$ on obtient $\|d \exp(B) - d \exp(C)\| = \|\exp(B) - \exp(C)\|$)

- Finalement, \exp est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{C}[A]$ et $d \exp(0) = \text{Id}_{\mathbb{C}[A]}$.

Le résultat démontré dans la deuxième partie 2 assure l'existence d'un ouvert U de $\mathbb{C}[A]$ contenant $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ et un ouvert V de $\mathbb{C}[A]$ contenant $\exp(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}) = I_n$ tels que \exp soit bijective et bicontinue de U vers V .

(11b) Soit $M \in \exp(\mathbb{C}[A])$ montrons qu'il existe un voisinage W de M tel que $W \subset \exp(\mathbb{C}[A])$.

Soit $C \in \mathbb{C}[A]$ tel que: $M = \exp(C)$. Posons $W = \exp(\{C\} + U)$, on a

$$\begin{aligned} W &= \{\exp(C+B) / B \in U\} \\ &= \{M \exp(B) / B \in U\} \\ &= \{MC / C \in V\} \\ &= M.V \end{aligned}$$

On a $M^{-1} \in \mathbb{C}[A]$ donc l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{C}[A] & \rightarrow & \mathbb{C}[A] \\ B & \mapsto & M^{-1}B \end{cases}$ est bien définie, bijective et elle est linéaire en dimension finie donc continue, ce qui permet d'écrire $W = M.V = \varphi^{-1}(V)$, ainsi W est un ouvert. Comme $I_n \in V$ alors $M \in W$

On déduit que W est voisinage ouvert de M tel que $W \subset \exp(\mathbb{C}[A])$ par suite $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert dans $\mathbb{C}[A]$.

12 ▷ Montrons qu'il existe un fermé F de $\mathbb{C}[A]$ tel que $\exp(\mathbb{C}[A]) = F \cap (\mathbb{C}[A])^*$

- Montrons que $F = \exp(\mathbb{C}[A])$ est un fermé de $\mathbb{C}[A]$:

Soit $B \in \mathbb{C}[A] \setminus F$. On a $B \exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$ contenu dans B (comme dans 11.b).

Montrons que $B \exp(\mathbb{C}[A])$ est contenu dans $\mathbb{C}[A] \setminus F$.

Si il existe $D \in F$ tel que $B \exp(D) \in F$, comme $\exp(D)$, $\exp(-D)$ et $B \exp(D)$ sont dans $\exp(\mathbb{C}[A])$ alors

$$B = [B \exp(D)] \exp(-D) \in \exp(\mathbb{C}[A])$$

ce qui est absurde, donc

$$B \exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A] \setminus F.$$

Ainsi $\mathbb{C}[A] \setminus F$ est un ouvert et F est un fermé de $\mathbb{C}[A]$.

- D'après la question 9. $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset (\mathbb{C}[A])^*$, donc $\exp(\mathbb{C}[A]) = F \cap (\mathbb{C}[A])^*$ par suite $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un fermé de $(\mathbb{C}[A])^*$.

Remarque : $(\mathbb{C}[A])^*$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}[A]$, et il n'a pas de structure d'espace vectoriel normé mais une structure d'espace métrique.

13 ▷ On suppose que $\exp(\mathbb{C}[A]) \neq (\mathbb{C}[A])^*$ soit $M_1, M_2 \in (\mathbb{C}[A])^*$ telles que $M_1 \in \exp(\mathbb{C}[A])$ et $M_2 \notin \exp(\mathbb{C}[A])$.

(13a) Soit f la fonction indicatrice de $(\mathbb{C}[A])^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$, c'est-à-dire:

$$f : (\mathbb{C}[A])^* \rightarrow \{0, 1\}$$

$$M \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } M \notin \exp(\mathbb{C}[A]), \\ 0 & \text{si } M \in \exp(\mathbb{C}[A]). \end{cases}$$

On a $f(M_1) = 0$ et $f(M_2) = 1$ donc $f((\mathbb{C}[A])^*) = \{0, 1\}$.

Montrons que f est continue en vérifiant que l'image réciproque de tout fermé de $\{0, 1\}$ est un fermé de $(\mathbb{C}[A])^*$.

Les fermés de $\{0, 1\}$ sont les fermés de \mathbb{R} inclus dans $\{0, 1\}$, ce sont donc toutes les parties de $\{0, 1\}$.

On a :

- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ (\emptyset est un fermé de $(\mathbb{C}[A])^*$)
- $f^{-1}(\{0\}) = \exp(\mathbb{C}[A])$ ($\exp(\mathbb{C}[A])$ est un fermé de $(\mathbb{C}[A])^*$ (question 12.))
- $f^{-1}(\{1\}) = (\mathbb{C}[A])^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ ($\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$ donc ouvert de $(\mathbb{C}[A])^*$ (question 11.b))
- $f^{-1}(\{0, 1\}) = (\mathbb{C}[A])^*$ ($(\mathbb{C}[A])^*$ est un fermé de $(\mathbb{C}[A])^*$)

Donc f est continue de $(\mathbb{C}[A])^*$ vers $\{0, 1\}$.

(13b) La fonction $f : (\mathbb{C}[A])^* \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et $(\mathbb{C}[A])^*$ connexe par arcs (question 10.c), donc l'image directe $f((\mathbb{C}[A])^*) = \{0, 1\}$ est une partie connexe par arcs de \mathbb{R} , absurde car les parties connexes par arcs de \mathbb{R} sont les intervalles.

La supposition du départ est fautive d'où $\boxed{\exp(\mathbb{C}[A]) = (\mathbb{C}[A])^*}$.

14 ▷ On a déjà $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \subseteq \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Réciproquement, soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors $A \in (\mathbb{C}[A])^*$, donc par la question précédente $A \in \exp(\mathbb{C}[A])$ or

$\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ donc $A \in \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. D'où l'inclusion réciproque et l'égalité : $\boxed{\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \text{GL}_n(\mathbb{C})}$.

Quatrième partie

15 ▷ D'après le théorème de Cauchy linéaire, l'ensemble \mathcal{S} des solutions de $X'(t) = A(t)X(t)$ (2) est un sous espace vectoriel de dimension n de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$.

Comme dans la partie 1, on vérifie que l'application:

$$\Psi_T : \begin{cases} \mathcal{S} & \rightarrow & \mathcal{S} \\ Y & \mapsto & (Y_T : t \mapsto Y(t+T)) \end{cases}$$

est un endomorphisme de \mathcal{S} .

Ψ_T admet donc au moins une valeur propre dans \mathbb{C} , et 0 ne peut pas être valeur propre car Ψ_T bijectif et $(\Psi_T)^{-1} = \Psi_{-T}$. D'où l'existence d'une valeur propre non nulle $\mu \in \mathbb{C}^*$ de Ψ_T et $Y \in \mathcal{S}$ est un vecteur propre associé, l'égalité $\Psi(Y) = \mu Y$ se traduit par $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, Y(t+T) = \mu Y(t)}$.

16 ▷ Soit (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) une base de \mathcal{S} . Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $M(t) = [Y_1(t)|Y_2(t)|\dots|Y_n(t)]$ la matrice dont les colonnes sont $Y_1(t), \dots, Y_n(t)$

(16a) • Par définition, le wronskien de la famille de solutions (Y_1, \dots, Y_n) est le déterminant de $M(t)$.

Or (Y_1, \dots, Y_n) est une base de solutions, donc le wronskien n'est jamais nul, donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, M(t) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})}$

• On a

$$\begin{aligned} M'(t) &= [Y_1'(t)|Y_2'(t)|\dots|Y_n'(t)] \\ &= [(A(t)Y_1(t))|(A(t)Y_2(t))|\dots|(A(t)Y_n(t))] \\ &= (A(t) [Y_1(t)|Y_2(t)|\dots|Y_n(t)]) \end{aligned}$$

d'où le résultat : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, M'(t) = A(t)M(t)}$.

Les solutions de (2) sont de la forme $t \mapsto M(t)X_0$ avec $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

En général $\frac{d}{dt} \exp(X(t)) \neq X'(t) \exp(X(t))$, on ne peut pas dire que $M(t) = \exp(\int A(t)dt)$.

(16b) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'application $t \mapsto Y_k(t+T)$ est élément de \mathcal{S} (question 15).

Alors il existe $(\alpha_{i,k})_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, Y_k(t+T) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,k} Y_i(t)$$

Posons (E_1, \dots, E_n) la base canonique \mathbb{C}^n , donc $Y_k(t) = M(t)E_k$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On a pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\begin{aligned} M(t)^{-1}M(t+T)E_j &= M(t)^{-1}Y_j(t+T) \\ &= M(t)^{-1} \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} Y_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} M(t)^{-1}Y_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} E_i \end{aligned}$$

ce qui prouve que la j ième colonne de $M(t)^{-1}M(t+T)$ est égale à ${}^T(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n,j})$, par suite

$M(t)^{-1}M(t+T) = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $\boxed{M(t)^{-1}M(t+T) \text{ est indépendante de } t \in \mathbb{R}}$.

(16c) On a pour tout $t \in \mathbb{R}$ $M(t)^{-1}M(t+T) = M(0)^{-1}M(T)$, posons $P = M(0)^{-1}M(T)$ alors $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

D'après la question 14, il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(C) = P$, soit $B = \frac{1}{T}C$ alors $\exp(TB) = P$.

Ainsi $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, M(t+T) = M(t) \exp(TB)}$.

(16d) Soit $Q : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \text{GL}_n(\mathbb{C}) \\ t & \longmapsto & M(t) \exp(-tB) \end{cases}$, on a $Q(t) = \Phi(M(t), \exp(-tB))$ avec $\Phi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ (M, N) & \longmapsto & M.N \end{cases}$.

Comme M et $t \mapsto \exp(-tB)$ sont continues et Φ bilinéaire en dimension finies alors Q est continue.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} Q(t+T) &= M(t+T) \exp(-(t+T)B) \\ &= M(t) \exp(TB) \exp(-TB) \exp(-tB) \\ &= M(t) \exp(-tB) \\ &= Q(t) \end{aligned}$$

donc Q est continue sur \mathbb{R} et T périodique de \mathbb{R} vers $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, M(t) = Q(t) \exp(tB)}$.

17 ▷ On admet la décomposition de Dunford : Il existe deux matrices D et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que D est diagonalisable, N est nilpotente et

$$B = D + N \text{ et } DN = ND.$$

Il existe donc une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale Δ telles que $D = P\Delta P^{-1}$.

(17a) Soit (E_1, \dots, E_n) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $M(t)P = [Z_1(t)|Z_2(t)|\dots|Z_n(t)]$

• Vérifions que les Z_i sont dans \mathcal{S} .

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a pour $t \in \mathbb{R}$ $M(t)PE_i = Z_i(t)$ donc

$$\begin{aligned} Z'_i(t) &= M'(t).PE_i \\ &= A(t)M(t)PE_i \\ &= A(t)Z_i(t) \end{aligned}$$

donc Z_i vérifie (2).

• Le wronskien de la famille de solutions (Z_1, \dots, Z_n) est le déterminant de $M(t)P$ qui est non nul, donc (Z_1, \dots, Z_n) est une base de \mathcal{S} .

(17b) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les nombres complexes tels que $\Delta = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Pour tous $0 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq n$ et $t \in \mathbb{R}$, on note $R_{i,k}(t)$ la k -ième colonne de la matrice $\frac{1}{i!}Q(t)N^iP$.

Soient $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} Z_k(t) &= M(t)PE_k \\ &= Q(t) \exp(tB)PE_k \\ &= Q(t) \exp(tD + tN)PE_k, \end{aligned}$$

les matrices D et N commutent, donc $\boxed{\exp(tD + tN) = \exp(tN) \exp(tD)}$.

Comme $D = P\Delta P^{-1}$ alors $\boxed{\exp(tD) = P \exp(t\Delta) P^{-1} = P \text{Diag}(e^{t\lambda_1}, e^{t\lambda_2}, \dots, e^{t\lambda_n}) P^{-1}}$ et

$$\begin{aligned} Z_k(t) &= Q(t) \exp(tN) \exp(tD)PE_k \\ &= Q(t) \exp(tN)P \exp(t\Delta)P^{-1}PE_k \\ &= Q(t) \exp(tN)P \exp(t\Delta)E_k \end{aligned}$$

Or $\exp(t\Delta)E_k = e^{t\lambda_k}E_k$ donc

$$Z_k(t) = e^{t\lambda_k}Q(t) \exp(tN)PE_k$$

N est nilpotente d'ordre au plus n donc $\exp(tN) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!} N^i$.

On en déduit :

$$Z_k(t) = e^{t\lambda_k} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!} Q(t) N^i P E_k = e^{t\lambda_k} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!} R_{i,k}(t).$$

Ainsi $Z_k(t) = e^{t\lambda_k} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!} R_{i,k}(t)$.

La continuité et la périodicité des $R_{i,k}$ découlent de celles de Q .

(17c) On suppose que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$.

Soit Y une solution de (2), alors il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tel que $Y = \sum_{k=1}^n \alpha_k Z_k$. Or

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall t \in \mathbb{R}, |Z_k(t)| \leq e^{\operatorname{Re}(\lambda_k)t} \sum_{i=0}^{+\infty} |t|^i |R_{i,k}(t)|$$

les $R_{i,k}$ sont bornées sur \mathbb{R} car elles sont continues et périodiques et les $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$, donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Z_k(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$,

par suite $Y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

18 ▷

(18a) Supposons qu'il existe $\lambda \in \operatorname{Sp}(B)$ tel que $\lambda = i \frac{2k\pi}{mT}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Soit V un vecteur propre de B associé à λ .

L'application $Y : t \mapsto M(t)V$ est solution non nulle de (2) (car $M'(t) = A(t)M(t)$).

Par continuité de l'application $\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) & \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \\ (M, X) & \longmapsto M.X \end{cases}$ on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \exp(tB)V &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^\ell}{\ell!} B^\ell V \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^\ell}{\ell!} \lambda^\ell V \\ &= e^{t\lambda} V \end{aligned}$$

donc $Y(t) = Q(t) \exp(tB)V = e^{\lambda t} Q(t)V$.

Comme $mT\lambda = 2ik\pi \in 2i\pi\mathbb{Z}$ et Q est T périodique alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$Y(t + mT) = e^{\lambda(t+mT)} Q(t + mT)V = e^{\lambda t} Q(t)V = Y(t)$$

Ainsi Y est une solution non nulle de (2) et mT -périodique.

(18b) Soit Y une solution mT -périodique et non nulle.

Il existe $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que: $\forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = M(t)X_0 = Q(t) \exp(tB)X_0$.

Comme $Y(mT) = Y(0)$ alors $M(T)X_0 = M(0)X_0$ et

$$Q(mT) \exp(mTB)X_0 = Q(0)X_0.$$

Comme Q est T -périodique donc $Q(mT) = Q(0)$ et

$$Q(0) \exp(mTB)X_0 = Q(0)X_0.$$

or Q est à valeurs dans $\operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ donc

$$\exp(mTB)X_0 = \exp(TB)^m X_0 = X_0.$$

cela montre que 1 est une valeur propre de $\exp(TB)^m$.

Or $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(TB)^m) = \{\lambda^m \mid \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(TB))\}$ (car toute les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont trigonalisables) donc il existe $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(TB))$ tel que $\lambda^m = 1$, d'où le résultat .

19 \triangleright Pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$, on a X et X' sont T -périodiques et T' -périodiques de X et A est T -périodique, donc X et X' sont $kT + \ell T'$ -périodiques par suite

$$X'(t + kT + \ell T') = A(t + kT + \ell T')X(t + kT + \ell T') = A(t + kT + \ell T')X(t).$$

Posons $G = \mathbb{Z}T' + \mathbb{Z}T$, qui est un sous-groupe de \mathbb{R} , engendré par T et T' , on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall g \in G, \quad X'(t) = A(t + g)X(t).$$

donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall g \in G, \quad A(t)X(t) = A(t + g)X(t) \quad (*)$$

Le sous groupe G est soit dense dans \mathbb{R} soit de la forme $\mathbb{Z}a$.

Si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $G = \mathbb{Z}a$ alors il existe $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $T = ak$ et $T' = a\ell$, de plus $(k, \ell) \neq (0, 0)$ car $(T, T') \neq (0, 0)$.

On en déduit que $\frac{T'}{T} = \frac{\ell}{k} \in \mathbb{Q}$ ce qui contredit l'hypothèse sur T' . Ainsi G est dense dans \mathbb{R} .

Soient $t, u \in \mathbb{R}$ et $(g_m)_{m \in \mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $u - t$, alors par continuité de A

$$A(t + g_m) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} A(t + u - t) = A(u)$$

par suite

$$A(t + g_m)X(t) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} A(u)X(t),$$

mais pour tout $m \in \mathbb{N}$, $A(t)X(t) = A(t + g_m)X(t)$, donc

$$A(t + g_m)X(t) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} A(t)X(t).$$

Par unicité de la limite on a $\boxed{\forall t, u \in \mathbb{R}, A(t)X(t) = A(u)X(t)}$.

20 \triangleright \blacktriangleright Cas 1 : Si $n = 1$.

$A = a$ une constante complexe, l'équation devient scalaire $x'(t) = ax(t)$ et admet comme solutions les fonctions $t \mapsto \lambda e^{at}$, on n'a une solution T' - périodique avec $T' > 0$ si et seulement si $a \in \frac{2i\pi}{T'}\mathbb{Z}$. Dans ce cas on peut prendre $Q = \lambda$ et $B = a$.

\blacktriangleright Cas 2 : Si $n \geq 2$.

• Cherchons les solutions T' -périodique non nulle avec $T' \notin \mathbb{Q}T$.

Soit X une solution T' -périodique non nulle avec $T' \notin \mathbb{Q}T$. Posons $V = \text{Vect}(X(t) ; t \in \mathbb{R})$, c'est un sous espace de dimension finie de \mathbb{C}^n , il est donc fermé.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ on a

$$\frac{1}{h}(X(t + h) - X(t)) \in V$$

or V est fermé, donc $X'(t) \in V$. Comme $\forall t \in \mathbb{R}, A(t)X(t) = X'(t)$ alors $A(t)V \subset V$ (V est stable par $A(t) \forall t \in \mathbb{R}$).

Par hypothèse et puisque $V \neq \{0\}$ on a donc $V = \mathbb{C}^n$. Soient $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ tels que $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ soit une base de \mathbb{C}^n .

Alors d'après la question 19 on a, pour tout $u \in \mathbb{R}$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$A(u)X(t_i) = A(t_i)X(t_i)$$

Ainsi, $A(u)$ est déterminé sur une base de \mathbb{C}^n de façon indépendante de u , donc A est constante.

Soit Y un vecteur propre de $A(0)$. Alors $\mathbb{C}Y$ est stable, par $A(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, qui est différent de $\{0\}$ et \mathbb{C}^n , ce qui contredit l'hypothèse sur A .

Donc il n'existe pas de solution T' -périodique non nulle avec $T' \notin \mathbb{Q}T$.

• Cherchons les solutions T' -périodique non nulle avec $T' \in \mathbb{Q}T$.

Soit X une solution T' -périodique avec $T' = \frac{m}{q}T$, $m, q \in \mathbb{N}^*$, donc X est mT -périodique et d'après la question 18.b), il existe $k \in \mathbb{Z}$ telle que:

$$e^{\frac{2ik\pi}{m}} \in \text{Sp}(\exp(TB)) = \{e^{T\lambda}; \lambda \in \text{Sp}(B)\}$$

Il existe donc $\lambda \in \text{Sp}(B)$ tel que $e^{T\lambda} = e^{\frac{2ik\pi}{m}}$ donc il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que

$$T\lambda = \frac{2ik\pi}{m} + 2i\ell\pi = \frac{2i(k + \ell m)\pi}{m}$$

Donc une condition nécessaire à l'existence de solutions T' -périodiques non nulle avec $T' \in \mathbb{Q}T$ est : B possède une valeur propre de la forme $\lambda \in \frac{2i\pi}{T}\mathbb{Q}$.

Réciproquement si B possède une valeur propre de la forme $\lambda \in \frac{2i\pi}{T}\mathbb{Q}$, la question 18.a assure l'existence d'une solution non nulle et mT -périodique.

Finalement l'équation (2) admet une solution périodique non nulle si et seulement si :

$$\begin{cases} n = 1 & \text{et } A \in \frac{2i\pi}{T'}\mathbb{Z}, T' > 0 \\ n = 2 & \text{et } \text{Sp}(B) \cap \frac{2i\pi}{T}\mathbb{Q} \neq \emptyset \end{cases}$$

21 ▷ Le théorème de Cauchy assure l'existence des solutions de (3) et que l'ensemble \mathcal{S}_3 des solutions de (3) s'écrit de la forme

$$\mathcal{S}_3 = \{X_p\} + \mathcal{S}_2$$

avec X_p est une solution particulière de (3) et \mathcal{S}_2 l'ensemble des solutions de (2).

Soit $X \in \mathcal{S}_3$ donc il existe $V \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$X(t) = M(t)V + X_p(t) = Q(t) \exp(tB)V + X_p(t)$$

• Si X est T -périodique alors $X(0) = X(T)$ et

$$Q(0)V + X_p(0) = Q(T) \exp(TB)V + X_p(T) = Q(0) \exp(TB)V + X_p(T)$$

donc

$$Q(0)[\exp(TB) - I_n]V = X_p(0) - X_p(T)$$

Par hypothèse on a $1 \notin \text{Sp}(\exp(TB))$, alors $\exp(TB) - I_n$ est inversible et

$$V = [\exp(TB) - I_n]^{-1}[Q(0)]^{-1}(X_p(0) - X_p(T)) \quad (*)$$

ce qui prouve l'unicité sous réserve d'existence.

• Soit V défini par la relation (*) et $X : t \mapsto M(t)V + X_p(t)$.

On a $X(0) = X(T)$ par construction de V . Soit $Y : t \mapsto X(t+T)$, elle est donc dérivable.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} Y'(t) &= X'(t+T) \\ &= A(t+T)X(t+T) + b(t+T) \\ &= A(t)Y(t) + b(t) \quad (A \text{ et } b \text{ sont } T\text{-périodique}) \end{aligned}$$

Donc X et Y sont solutions du problème de Cauchy formé par $Z' = AZ + b$ et la condition initiale $Z(0) = X(0)$.

Par unicité de la solution de ce problème on a $Y = X$, donc X est une solution de (3) T -périodique, d'où l'existence.

Finalement, (3) possède une unique solution T -périodique.

22 ▷ Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos(t) \\ \cos(t) & 1 \end{pmatrix}$, le système s'écrit $X'(t) = A(t)X(t)$.

Notons $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A(t) = I_2 + \cos(t)J$.

On a $\chi_J(X) = X^2 + 1$, donc J est diagonalisable, un petit calcul donne $J = P \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$.

donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad A(t) = PDP^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 + i \cos(t) & 0 \\ 0 & 1 - i \cos(t) \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Posons $X = PY$ alors

$$X'(t) = A(t)X(t) \Leftrightarrow PY'(t) = A(t)PY(t) \Leftrightarrow Y'(t) = DY(t)$$

Notons $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ donc

$$Y'(t) = DY(t) \Leftrightarrow \begin{cases} u'(t) = (1 + i \cos(t))u(t) \\ v'(t) = (1 - i \cos(t))v(t) \end{cases}$$

ainsi il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda e^{t+i \sin(t)} \\ \mu e^{t-i \sin(t)} \end{pmatrix}$ et $X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} \lambda e^{t+i \sin t} + \mu e^{t-i \sin t} \\ -i \lambda e^{t+i \sin t} + i \mu e^{t-i \sin t} \end{pmatrix}$.

On a $X(t) = \begin{pmatrix} e^{t+i \sin t} & e^{t-i \sin t} \\ -i e^{t+i \sin t} & i e^{t-i \sin t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ on prend donc

$$M(t) = \begin{pmatrix} e^{t+i \sin t} & e^{t-i \sin t} \\ -i e^{t+i \sin t} & i e^{t-i \sin t} \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} e^{i \sin t} & e^{-i \sin t} \\ -i e^{i \sin t} & i e^{-i \sin t} \end{pmatrix}$$

Il suffit de poser $B = I_n$ et $Q(t) = \begin{pmatrix} e^{i \sin t} & e^{-i \sin t} \\ -i e^{i \sin t} & i e^{-i \sin t} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e^{i \sin t} & 0 \\ 0 & e^{-i \sin t} \end{pmatrix} P^{-1}$ pour mettre M sous la

forme $M(t) = Q(t) \exp(tB)$ avec $Q : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ continue et 2π -périodique.

Une autre forme normale réelle :

On a

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{pmatrix} e^t(\lambda e^{i \sin t} + \mu e^{-i \sin t}) \\ e^t(-i \lambda e^{i \sin t} + i \mu e^{-i \sin t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(\lambda e^{i \sin t} + \mu e^{-i \sin t}) \\ e^t(-i \lambda e^{i \sin t} + i \mu e^{-i \sin t}) \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} (\lambda + \mu) \cos(\sin t) + i(\lambda - \mu) \sin(\sin t) \\ i(-\lambda + \mu) \cos(\sin t) + (\lambda + \mu) \sin(\sin t) \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} \cos(\sin t) & -\sin(\sin t) \\ \sin(\sin t) & \cos(\sin t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ i(-\lambda + \mu) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on prend donc $M(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos(\sin(t)) & -e^t \sin(\sin(t)) \\ e^t \sin(\sin(t)) & e^t \cos(\sin(t)) \end{pmatrix}$, $B = I_n$ et $Q(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sin t) & -\sin(\sin t) \\ \sin(\sin t) & \cos(\sin t) \end{pmatrix}$.