Systèmes linéaires

I) Généralités

1) Exemples de systèmes linéaires et vocabulaire

$$(\Sigma_1) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$$

$$(\Sigma_2) \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 1 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

$$(\Sigma_3) \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + z = -1 \end{cases}$$

Vocabulaire

Pour $(\Sigma_3) \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + z = -1 \end{cases}$:

1) $(H_3) \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$ est le système linéaire homogène associé à (Σ_3).

2) (x, y, z) les inconnues.

3) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ le second membre du système (Σ_3).

4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice du système (Σ_3)

5) (x,y,z) solution du système Σ_3 si et seulement si (x,y,z) vérifie les deux équations du système.

NB

Considérons le système Σ_3 $\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + z = -1 \end{cases}$.

Notons

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la colonne des inconnues.

$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ le second membre.

On a :

(x,y,z) solution de $\Sigma_3 \iff AX = B$

À retenir

Justification

$$AX = B \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ x + 3y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + z = -1 \end{cases}$$

$$\iff (x,y,z) \text{ solution de } \Sigma_3$$

Vocabulaire

« $AX = B$ » s'appelle l'écriture matricielle du système Σ_3.

Exercice :

Donner l'écriture matricielle de chacun des systèmes Σ_1 et Σ_2.

2) Cas général

Considérons le système linéaire suivant :

$$\Sigma \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a) $$H \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$ est le système linéaire homogène associé à Σ.

b) $(x_1, \ldots, x_n)$ les inconnues.

c) $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ le second membre du système Σ.

d) $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ est la matrice du système Σ

e) Si $m=n$, Σ est dit système carré d'ordre n.

Proposition

Notons A la matrice de Σ, B son second membre et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la colonne de ses inconnues. On a :

$$\boxed{(x_1, \dots, x_n) \text{ solution de } \Sigma \iff AX = B}$$

Vocabulaire

« $AX = B$ » s'appelle l'écriture matricielle du système Σ.

NB :

Résoudre le système Σ est équivalent à résoudre l'équation matricielle « $AX = B$ » d'inconnue X.

3) Système de Cramer

On considère maintenant le système carré suivant :

$$\Sigma \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

A désigne sa matrice associée.

Définition 1

Le système Σ est dit système de Cramer si et seulement si sa matrice A est inversible.

Proposition 2

Tout système de Cramer possède une unique solution.

Démo

Gardons les notations prises ci-dessus. On a :

$(x_1, \dots, x_n)$ solution de Σ $\Leftrightarrow AX = B$

$\Leftrightarrow X = A^{-1}B$

D'où l'existence d'une unique solution $(x_1, \dots, x_n)$ du système, donnée par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}B$$

NB :

On verra deux méthodes pour résoudre un système de Cramer :

1) Méthode de Gauss : Qu'on verra dans ce chapitre.

2) Méthode de Cramer : Qu'on verra dans le chapitre du « Déterminant ».

Corollaire 3

Un système homogène de Cramer possède $(0, \dots, 0)$ comme unique solution.

Démo

Soit H $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$ un système homogène de Cramer.

Il est clair que $(0,\dots,0)$ en est une solution.
Puisque c'est un système de Cramer, c'est la seule.

Réflexe à avoir

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \iff (x_1,\dots,x_n) = (0,\dots,0)$$

si le système est de Cramer.

Exemple d'utilisation

Justifions que $(2+3X, 5-2X)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.

Solution

Nous savons qu'il suffit de montrer que $(2+3X, 5-2X)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_1[X]$.

Supposons que $\alpha(2+3X)+\beta(5-2X)=0$.

Alors $\begin{cases} 2\alpha+5\beta=0 \\ 3\alpha-2\beta=0 \end{cases}$

C'est un système de Cramer $\left(\text{car } \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -19 \neq 0}\right)$

voir chapitre des déterminants

D'où $\boxed{\alpha=\beta=0}$ □

II) Résolution d'un système de Cramer

1) Résolution d'un système de Cramer triangulaire supérieur

Définition

Un système carré est dit triangulaire supérieur si et seulement si sa matrice est triangulaire supérieure.

Exemple

Résolvons le système triangulaire supérieur suivant :

$$(\Sigma)\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 2y + z = -1 \\ -z = 2 \end{cases}$$

Solution

$$(\Sigma)\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 2y + z = -1 \\ -z = 2 \end{cases}$$

On le résout par remontée :

- On commence par la dernière équation. On tire z.

$$z = -2$$

- Puis on remonte à l'équation $\boxed{(2) : 2y + z = -1}$

On remplace z par sa valeur (-2) trouvée.

Et on tire y.

$$y = \frac{1}{2}$$

- Puis on remonte à l'équation $\boxed{(1) : 2x + y - z = 1}$

On remplace y et z par leurs valeurs trouvées.

Et on tire .

$$x = -\frac{3}{4}$$

Fin

Cas général

Considérons le système triangulaire supérieur de Cramer :

$$(\Sigma)\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1\,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\ddots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} + a_{(n-1)n}x_n = b_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On résout (Σ) par remontée :

① On commence par la dernière équation : $\boxed{x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}}$

② On remonte à l'avant dernière équation :

$$a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} + a_{(n-1)n}x_n = b_{n-1}$$

On remplace x_n par sa valeur trouvée. Puis on tire la valeur de x_{n-1} :

$$\boxed{x_{n-1} = \frac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}\left(b_{n-1} - a_{(n-1)n}x_n\right)}$$

③ On remonte de proche en proche, jusqu'à la première équation. On remplace $x_n, \ldots, x_2$ par leur valeurs trouvées, et on tire x_1 :

$$\boxed{x_1 = \frac{b_1 - \sum_{i=2}^{n} a_{1i}x_i}{a_{11}}}$$

Fin

Exercice d'informatique

Écrire une fonction python TS(T,b) qui prend en arguments une matrice T, triangulaire supérieure et une liste b, comme second membre, et retourne la solution L du système « Tx=b » sous forme d'une liste.

2) Cas général

Exemple 1

Résolvons via la méthode de Gauss le système suivant :

$$(\Sigma_1)\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+y-z=-1 \\ 3x-y+2z=0 \end{cases}$$

Solution

On échelonne d'abord le système :

$$(\Sigma_1) \iff \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+y-z=-1 \\ 3x-y+2z=0 \end{cases}$$

pivot

$$\iff \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ -y+z=3 & L_2 \leftarrow -2L_2+L_1 \\ -5y+7z=-3 & L_3 \leftarrow 2L_3-3L_1 \end{cases}$$

pivot

$$\iff \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ -y+z=3 \\ 2z=-18 & L_3 \leftarrow L_3-5L_2 \end{cases}$$

Le système est échelonné. Il est triangulaire supérieur. On le résout par remontée comme dans le paragraphe précédent.

On trouve après calculs : $\boxed{\begin{array}{l} x = \dots \\ y = -12 \\ z = -9 \end{array}}$ □

Exemple 2 (vu au lycée)

Résolvons via la méthode de Gauss le système :

$$\Sigma_2 \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$$

Solution

On échellonne d'abord le système :

pivot

$$\Sigma_2 \iff \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y = 3 \\ \quad -7y = 7 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1$$

Le système est échelonné. Il est triangulaire supérieur.
On le résout par remontée.

On a : $\boxed{y = -1}$

On remonte, on remplace y par (-1) dans l'équation $2x + y = 3$, on trouve $\boxed{x = 2}$.

Fin

Remarque :

Notez que c'est exactement la méthode de combinaison linéaire vue au lycée.

Résumé

> Pour la résolution d'un système de Cramer via la méthode du pivot de Gauss :
>
> **Étape 1 :**
>
> On échelonne le système.
>
> **Étape 2 :**
>
> Le système est ainsi un système échelonné triangulaire supérieur.
> On le résout alors par remontée, comme vu dans le paragraphe précédant.

III) Résolution d'un système homogène quelconque

1) Exemples illustrant la méthode de résolution

Exemple 1

Considérons le système homogène suivant :

$$(H)\begin{cases} -x+6y-z=0 \\ 2x-5y+3z=0 \end{cases}$$

Notons S l'ensemble des solutions de (H).

Résolvons ce système par la méthode de Gauss.

On déterminera en particulier une base de S.

« On verra que S est un espace vectoriel »

Solution

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$(x,y,z)\in S \iff \begin{cases} -x+6y-z=0 \\ 2x-5y+3z=0 \end{cases}$$

« On échelonne d'abord le système »

$$\iff \begin{cases} -x+6y-z=0 \\ 7y+z=0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2+2L_1$$

« Le système est échelonné »

Vocabulaire

1) x et y : les inconnues principales.
2) z : inconnue secondaire.

Étape suivante

$\boxed{\text{On déplace l'inconnue secondaire vers l'autre côté.}}$

$$(x,y,z)\in S \iff \begin{cases} -x+6y-z=0 \\ 7y+z=0 \end{cases}$$

$$\iff \underbrace{\begin{cases} -x+6y=z \\ 7y=-z \end{cases}}$$

système triangulaire supérieur d'inconnues x et y. On le résout par remontée.

$$\iff \begin{cases} x=-\frac{13}{7}z \\ y=-\frac{z}{7} \end{cases}$$

étape à mémoriser

$$\iff (x,y,z)=\left(-\frac{13}{7}z, -\frac{z}{7}, z\right)$$

$$\Longleftrightarrow (x,y,z) = z\cdot\left(-\frac{13}{7}, \frac{-1}{7}, 1\right)$$

$$\Longleftrightarrow (x,y,z) \in \text{Vect}\left(\left(-\frac{13}{7}, \frac{-1}{7}, 1\right)\right)$$

Enfin :

$$\boxed{(x,y,z) \in S \Longleftrightarrow (x,y,z) \in \text{Vect}\left(\left(-\frac{13}{7}, \frac{-1}{7}, 1\right)\right)}$$

D'où

$S = \text{Vect}\left(\left(-\frac{13}{7}, \frac{-1}{7}, 1\right)\right)$

Une base de S est $\left(\left(-\frac{13}{7}, \frac{-1}{7}, 1\right)\right)$

Fin

Exemple 2 (Démarré au chapitre des matrices)

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\underset{B}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Déterminer $\ker(f - 2I_{\mathbb{R}^3})$ et en préciser une base.

Solution

On avait trouvé :

$$(x,y,z) \in \ker(f - 2I_{\mathbb{R}^3}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - 2z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ 3x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Poursuivons maintenant en résolvant ce système, par la méthode du pivot de Gauss. (retenez-la !)

On échelonne d'abord.

$$\begin{array}{l} \\ (x,y,z)\in \ker(f-2I_{\mathbb{R}^3}) \iff \end{array} \left\{\begin{array}{rl} \overset{\text{pivot}}{2}x-2y-2z=0 & \text{ligne du pivot} \\ -2y \quad =0 & L_2\leftarrow 2L_2-L_1 \\ 2y \quad =0 & L_3\leftarrow 2L_3-3L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} 2x-2y-2z=0 \\ y \quad =0 \end{array}\right.$$

x et y inconnues principales. Gardons-les à gauche.
z inconnue secondaire. Déplaçons-la de l'autre côté.

$$\iff \left\{\begin{array}{l} 2x-2y=2z \\ y=0 \end{array}\right.$$

Système échelonné (d'inconnues x et y). On le résout par remontée.

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=z \\ y=0 \end{array}\right.$$

L'étape suivante à retenir ! C'est presque fini.

$$\iff (x,y,z)=(z,0,z)$$

$$\iff (x,y,z)=z(1,0,1)$$

$$\iff \boxed{(x,y,z)\in \mathrm{Vect}\big((1,0,1)\big)}$$

↳ à retenir encore comme reflexe.

D'où :

$$(x,y,z)\in \ker(f-2I_{\mathbb{R}^3}) \iff (x,y,z)\in \mathrm{Vect}\big((1,0,1)\big)$$

Enfin :

$\ker(f-2I_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}((1,0,1))$

Une base de $\ker(f-2I_{\mathbb{R}^3})$ est $((1,0,1))$

$\dim(\ker(f-2I_{\mathbb{R}^3})) = 1$

Fin

Avertissement !

Voici une erreur que je rencontre chez certains élèves chaque année :

$$\begin{cases} 2x-2y-2z=0 \\ x-2y-z=0 \\ 3x-2y-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y-2z=0 \\ -2y=0 & L_2 \leftarrow 2L_2-L_1 \\ 4y=0 & L_3 \leftarrow L_3-3L_2 \end{cases}$$

Ça donnera le résultat final correct, mais la méthode est fausse.

C'est que la ligne L_2 marquée en vert a changée !

2) Cas général

Définition 1

Le rang d'un système linéaire est celui de sa matrice associée.

Exemple express

Reconsidérons le système résolu ci-dessus :

$$(H) \begin{cases} -x+6y-z=0 \\ 2x-5y+3z=0 \end{cases}$$

Que vaut son rang ?

Réponse :

Son rang est $rg(A)$, où $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

$rg(A)$ est égal au rang de ses lignes.

L_1 et L_2 linéairement indépendantes car non colinéaires

D'où $\boxed{rg(A) = 2}$

Remarque

Faisable aussi via la méthode de Gauss.

Proposition 2

Considérons un système homogène :

$$(H) \begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = 0 \\ \quad \vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$

à m équations et n inconnues.

Notons S_H l'ensemble des solutions de (H) et r son rang.

On a :

1) S_H est un espace vectoriel.

2) $\dim(S_H) = n - r$ $\square$

Exemple express

Reconsidérons encore le système ci-dessus :

$$(H) \begin{cases} -x + 6y - z = 0 \\ 2x - 5y + 3z = 0 \end{cases}$$

On avait que $r = 2$ est son rang.

D'où $\dim(S_H) = \underbrace{n}_{=3\,;\ \text{nombre d'inconnues}} - \underbrace{r}_{=2} = 1$

Et c'est ce qu'on avait trouvé effectivement. $\square$

Démo de prop 2 :

$$(H)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Notons A la matrice du système.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ l'application linéaire canoniquement associée à A.

1) S_H est un espace vectoriel ?

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On a :

$$(x_1, \dots, x_n) \in S_H \iff A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff f(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$$

$$\iff (x_1, \dots, x_n) \in \ker(f)$$

D'où $S_H = \ker(f)$, et donc S_H sev de $\mathbb{K}^n$.

$\Rightarrow$ $\boxed{S_H \text{ est un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel}}$

2) $\dim(S_H) = n - r$?

On a $S_H = \ker(f)$

$\Rightarrow \dim(S_H) = \dim(\ker(f))$

$= \dim(\mathbb{K}^n) - rg(f)$

théorème du rang

$= n - \underbrace{rg(A)}_{= r}$

$= n - r$ $\square$

Fin