

CONCOURS COMMUN 2007
DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES
Epreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

CORRECTION

Deuxième problème

I. Changement de bases et division euclidienne

18. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3 = 0 &\Rightarrow \forall j \in \{1, 2, 3\}, \lambda_1 Q_1(a_j) + \lambda_2 Q_2(a_j) + \lambda_3 Q_3(a_j) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 Q_1(a_1) = 0 \\ \lambda_2 Q_2(a_2) = 0 \\ \lambda_3 Q_3(a_3) = 0 \end{cases} \quad (\text{car } \forall i \neq j, Q_i(a_j) = 0) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{car } \forall i, Q_i(a_i) \neq 0).\end{aligned}$$

On a montré que

la famille (Q_1, Q_2, Q_3) est libre.

19. En posant $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ et $a_3 = 5$, on a $\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$, $P_i(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

20. Les trois polynômes P_1 , P_2 et P_3 sont bien éléments de $\mathbb{R}_2[X]$. Puisque a_1 , a_2 et a_3 sont trois réels deux à deux distincts, la question 18. montre que la famille (P_1, P_2, P_3) est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$. Enfin, $\text{card}(P_1, P_2, P_3) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X]) < +\infty$. On en déduit que

la famille $\mathcal{P} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.

21. $P_1 = \frac{15}{8} - X + \frac{1}{8}X^2$, $P_2 = -\frac{5}{4} + \frac{3}{2}X - \frac{1}{4}X^2$ et $P_3 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}X + \frac{1}{8}X^2$. Donc la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{P}$ est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix} \frac{15}{8} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{8} \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

22. La matrice A est la matrice d'une base dans une autre (ou encore A est une matrice de passage) et donc la matrice A est inversible. A^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{P}$ à la base $\mathcal{B}$. Or

$$\begin{aligned}
\begin{cases} P_1 = \frac{15}{8} - X + \frac{1}{8}X^2 \\ P_2 = -\frac{5}{4} + \frac{3}{2}X - \frac{1}{4}X^2 \\ P_3 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}X + \frac{1}{8}X^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} X^2 = -3 + 4X + 8P_3 \\ P_1 = \frac{15}{8} - X + \frac{1}{8}(-3 + 4X + 8P_3) \\ P_2 = -\frac{5}{4} + \frac{3}{2}X - \frac{1}{4}(-3 + 4X + 8P_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 = -3 + 4X + 8P_3 \\ P_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}X + P_3 \\ P_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}X - 2P_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} X^2 = -3 + 4X + 8P_3 \\ X = 1 + 2P_2 + 4P_3 \\ P_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(1 + 2P_2 + 4P_3) + P_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 = -3 + 4X + 8P_3 \\ X = 1 + 2P_2 + 4P_3 \\ P_1 = 1 - P_2 - P_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = P_1 + P_2 + P_3 \\ X = (P_1 + P_2 + P_3) + 2P_2 + 4P_3 \\ X^2 = -3 + 4X + 8P_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = P_1 + P_2 + P_3 \\ X = P_1 + 3P_2 + 5P_3 \\ X^2 = -3(P_1 + P_2 + P_3) + 4(P_1 + 3P_2 + 5P_3) + 8P_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = P_1 + P_2 + P_3 \\ X = P_1 + 3P_2 + 5P_3 \\ X^2 = P_1 + 5P_2 + 25P_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Mais alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}.$$

23. Soient $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. La division euclidienne de P_1 par P_0 s'écrit $P_1 = Q_1P_0 + \widehat{P}_1$ où $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(\widehat{P}_1) < \deg(P_0) = 3$ et la division euclidienne de P_2 par P_0 s'écrit $P_2 = Q_2P_0 + \widehat{P}_2$ où $Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(\widehat{P}_2) < \deg(P_0) = 3$. Mais alors

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = \lambda_1(Q_1 P_0 + \widehat{P}_1) + \lambda_2(Q_2 P_0 + \widehat{P}_2) = (\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2)P_0 + (\lambda_1 \widehat{P}_1 + \lambda_2 \widehat{P}_2).$$

Comme $\deg(\lambda_1 \widehat{P}_1 + \lambda_2 \widehat{P}_2) \leq \max\{\deg(\widehat{P}_1), \deg(\widehat{P}_2)\} < 3 = \deg(P_0)$, le reste de la division euclidienne de $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ par P_0 est $\lambda_1 \widehat{P}_1 + \lambda_2 \widehat{P}_2$ ou encore

$$f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 \widehat{P}_1 + \lambda_2 \widehat{P}_2 = \lambda_1 \widehat{P}_1 + \lambda_2 \widehat{P}_2 = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2).$$

On a montré que

f est linéaire.

24. $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\widehat{P} \in \mathbb{R}_2[X]$ et donc $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[X]$. Réciproquement, soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$. Puisque $\deg(Q) < 3 = \deg(P_0)$, la division euclidienne de Q par P_0 s'écrit

$$Q = 0 \times P_0 + Q,$$

et en particulier $Q = \widehat{Q} \in \text{Im}(f)$. Ceci montre que $\mathbb{R}_2[X] \subset \text{Im}(f)$ et finalement que

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X].$$

25. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $f(P) = 0 \Leftrightarrow \widehat{P} = 0 \Leftrightarrow P$ est divisible par P_0 .

$$\text{Ker}(f) = \{\text{multiples de } P_0\} = \{QP_0, Q \in \mathbb{R}[X]\} = P_0 \mathbb{R}[X].$$

26. On a vu à la question 24 que si $Q \in \mathbb{R}_2[X] = \text{Im}(f)$ alors $f(Q) = Q$. Par suite, pour tout polynôme P , $f^2(P) = f(f(P)) = f(P)$ (le polynôme $Q = f(P)$ étant dans $\text{Im}(f)$). Donc

$$f^2 = f$$

On sait alors que f est la projection sur son image parallèlement à son noyau (qui sont supplémentaires dans ce cas) ou encore

f est la projection sur $\mathbb{R}_2[X]$ parallèlement à $P_0\mathbb{R}[X]$.

27. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $\widehat{P}$ est un élément de $\mathbb{R}_2[X]$ et puisque $\mathcal{P}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ il existe trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que

$$\widehat{P} = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3.$$

En évaluant en 1, on obtient $\lambda_1 = \widehat{P}(1)$ d'après la question 19. De même en évaluant en 3 et 5, on obtient $\lambda_2 = \widehat{P}(3)$ et $\lambda_3 = \widehat{P}(5)$. Maintenant la division euclidienne de P par $P_0 = (X-1)(X-3)(X-5)$ s'écrit

$$P = Q(X-1)(X-3)(X-5) + \widehat{P},$$

où Q est un certain polynôme. En évaluant de nouveau en 1, on obtient $\widehat{P}(1) = P(1)$ et de même $\widehat{P}(3) = P(3)$ et $\widehat{P}(5) = P(5)$. Finalement

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \widehat{P} = P(1)P_1 + P(3)P_2 + P(5)P_3.$$

28. En particulier, $1 = \widehat{1} = 1 \times P_1 + 1 \times P_2 + 1 \times P_3 = P_1 + P_2 + P_3$ puis $X = 1 \times P_1 + 3 \times P_2 + 5 \times P_3 = P_1 + 3P_2 + 5P_3$ et $X^2 = 1^2 \times P_1 + 3^2 \times P_2 + 5^2 \times P_3 = P_1 + 9P_2 + 25P_3$. On retrouve ainsi les résultats de la question 22.

II. Calcul matriciel

29.

$$\begin{aligned} (M-I)(M-3I)(M-5I) &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'autre part, il y a encore 5 produits autres que le produit $(M-I)(M-3I)(M-5I)$ se déduisant de ce produit par permutations des facteurs. Mais $(aM+bI)(cM+dI) = acM^2 + (ad+bc)M + bdI = (cM+dI)(aM+bI)$. Par suite les trois facteurs commutent deux à deux et donc

$$\begin{aligned} (M-I)(M-3I)(M-5I) &= (M-I)(M-5I)(M-3I) = (M-3I)(M-I)(M-5I) = (M-3I)(M-5I)(M-I) \\ &= (M-5I)(M-I)(M-3I) = (M-5I)(M-3I)(M-I) = 0. \end{aligned}$$

30. $E = \text{Vect}(I, M, M^2)$ et donc

E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

31. La famille (I, M, M^2) est une famille génératrice de E et donc $\dim(E) \leq 3$. Montrons que cette famille est libre. Tout d'abord

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 0 \\ 12 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Soit alors $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$aI + bM + cM^2 = 0 \Rightarrow a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 13 & 12 & 0 \\ 12 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b + 12c = 0 \\ a + 3b + 9c = 0 \\ a + 3b + 13c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4c = 0 \text{ (} L_3 - L_2 \text{)} \\ 2b + 12c = 0 \\ a + 3b + 9c = 0 \\ a + 3b + 13c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 2b = 0 \\ a + 3b = 0 \\ a + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = 0.$$

Ainsi, la famille (I, M, M^2) est libre et donc est une base de E . En particulier

$$\dim(E) = 3.$$

32. Montrons que Φ est linéaire. Soient $(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^6$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ puis $P_1 = a_1 + b_1X + c_1X^2$ et $P_2 = a_2 + b_2X + c_2X^2$.

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) &= (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)I + (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)M + (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2)M^2 \\ &= \lambda_1(a_1 I + b_1 M + c_1 M^2) + \lambda_2(a_2 I + b_2 M + c_2 M^2) = \lambda_1 \Phi(P_1) + \lambda_2 \Phi(P_2). \end{aligned}$$

Ainsi l'application Φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ vers E . De plus, l'image par Φ de la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est la base (I, M, M^2) de E et donc

$$\Phi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}_2[X] \text{ sur } E.$$

33. On a vu à la question 28. que

$$\begin{aligned} 1 &= P_1 + P_2 + P_3 \\ X &= P_1 + 3P_2 + 5P_3 \\ X^2 &= P_1 + 9P_2 + 25P_3 \end{aligned} ,$$

et le résultat de la question précédente permet alors d'écrire

$$\begin{aligned} I &= \Phi(1) = \Phi(P_1 + P_2 + P_3) = \Phi(P_1) + \Phi(P_2) + \Phi(P_3) = B_1 + B_2 + B_3 \\ M &= \Phi(X) = \Phi(P_1 + 3P_2 + 5P_3) = \Phi(P_1) + 3\Phi(P_2) + 5\Phi(P_3) = B_1 + 3B_2 + 5B_3 \\ M^2 &= \Phi(X^2) = \Phi(P_1 + 9P_2 + 25P_3) = \Phi(P_1) + 9\Phi(P_2) + 25\Phi(P_3) = B_1 + 9B_2 + 25B_3 \end{aligned} .$$

$$\begin{aligned} I &= B_1 + B_2 + B_3 \\ M &= B_1 + 3B_2 + 5B_3 \\ M^2 &= B_1 + 9B_2 + 25B_3 \end{aligned} .$$

34. On a $B_1 = \frac{1}{8}(M - 3I)(M - 5I)$. La première égalité de la question 29 fournit alors $(M - I)B_1 = 0$. En multipliant les deux membres de cette égalité par $M - 3I$ ou $M - 5I$ et en tenant compte du fait que les différents facteurs commutent deux à deux, on obtient $B_2 B_1 = B_3 B_1 = 0$. On obtient de même $B_2 B_1 = B_2 B_3 = B_3 B_1 = B_3 B_2 = 0$.

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, (i \neq j \Rightarrow B_i B_j = 0).$$

FIN

