Exercice III

1) a) E de dimension finie.
Pour m.que $E = \ker p \oplus \operatorname{Im}(p)$, il suffit de m.que :
i) $\ker p \cap \operatorname{Im} p = \{0\}$
ii) $\dim E = \dim \ker p + \dim \operatorname{Im} p$

* Pour ii) C'est le théorème du rang
* Pour i) :

Soit $x \in \ker p \cap \operatorname{Im} p$. M-que $x = 0$

On a $\begin{cases} p(x) = 0 \\ \exists y \in E,\ x = p(y) \end{cases}$

$x = p(y) \Rightarrow \underbrace{p(x)}_{=0} = \underbrace{p^2(y)}_{= p(y) = x}$,

$\Rightarrow \boxed{x = 0}$

1) b) $tr(p) \stackrel{?}{=} rg(p)$:
Soit $B = B_1 \cup B_2$ une base adaptée à la décomposition : $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$.
Notons $r = rg(p) (= card(B_2))$

$$\underset{B}{mat}(p) = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \ddots 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0_{n-r} & 0 \\ \hline 0 & I_r \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \boxed{tr(p) = r}$ CQFD

1) c) Posons ici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
On a $rg(A) = 2 \Rightarrow rg(f) = 2$
et on a $tr(f) = tr(A) = 2$
D'où $rg(f) = tr(f)$.
Mais $f^2 \neq f$ car $A^2 \neq A$
D'où $rg(f) = tr(f)$ mais f n'est pas un projecteur

2) i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $rg(A) = 1$
et A diagonalisable car diagonale

ii) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $rg(B) = 1$.
B n'est pas diagonalisable ; en effet :
On a $Sp(B) = \{0\}$.
Si B était diagonalisable alors B serait semblable à $diag(0,0,0)$; la matrice nulle
$\Rightarrow B = 0$, ce qui est absurde.
D'où B n'est pas diagonalisable

3/a/ On a $rg(U) = 1$ alors $\dim(\ker(U)) = n-1$ (thm du rang)
Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\ker(U)$.
Soit $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ une base de E (ça existe en vertu du théorème de la base incomplète). Notons-la β.
On a $U(e_1) = \dots = U(e_{n-1}) = 0$,
Posons $U(e_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, où les a_i des réels.

Alors :

$$\underset{\beta}{mat}(U) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

3/b/ ($\Rightarrow$) Supp. que U diagonalisable.
M.que $tr(U) \neq 0$: Càd $a_n \neq 0$:

U diagonalisable $\Rightarrow \underset{\beta}{mat}(U) = A$ diagonalisable
Si $a_n = 0$, alors $Sp(A) = \{0\}$.
et A diagonalisable $\Rightarrow$ A semblable à 0
$\Rightarrow A = 0$; absurde car $rg(A) = 1$
D'où $a_n \neq 0$

($\Leftarrow$) Supp que $tr(U) \neq 0$.
M. que U diagonalisable :

On a $a_n \neq 0$, alors $Sp(U) = \{0, a_n\}$.
En plus $\begin{cases} \dim E_0(U) = \dim \ker(U) = n-1 = m(0) \\ \dim E_{a_n}(U) = 1 \text{ ; c'est une valeur propre simple} \end{cases}$

D'où U diagonalisable

3/ c/ Supp que $tr(U) = rg(U) = 1$.

Mq que U est un projecteur :

càd Mq que $A^2 = A$; où $A = mat_\beta(U)$

On a $tr(U) = a_n = 1$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $A^2 = A$ (juste effectuer vos calculs) $\boxed{}$

3/ d/ i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$; En effet :

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A. On a :

$$\begin{cases} rg(f) = rg(A) = 1 \\ tr(f) = tr(A) = 1 \end{cases}$$

$\overset{3/c}{\Longrightarrow}$ f projecteur /

ii/ $Im(f) = ?$

On a $rg(f) = 1 = \dim(Im(f))$

alors $Im(f) = Vect(f(\varepsilon_1))$; où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow Im(f) = Vect((1,1,1))$

iii) $Ker(f) = ?$

$(x,y,z) \in Ker(f) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow x + y - z = 0$

$\Leftrightarrow (x,y,z) = (x, y, x+y)$

$\Leftrightarrow (x,y,z) \in Vect((1,0,1); (0,1,1))$

D'où $Ker(f) = Vect((1,0,1); (0,1,1))$

Fin Exercice II