

Espaces vectoriels de dimensions
finies

N.B : $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, les familles suivantes sont-elles libres ?

- 1) (f, g, h) où $f : x \mapsto \sin(x)$, $g : x \mapsto \cos(x)$ et $h : x \mapsto 1$
- 2) (f, g, h, i) où $f : x \mapsto \sin(x)$, $g : x \mapsto \cos(x)$, $h : x \mapsto x \sin(x)$ et $i : x \mapsto x \cos(x)$
- 3) (f, g, h) où $f : x \mapsto \sin^2(x)$, $g : x \mapsto \cos^2(x)$ et $h : x \mapsto 1$
- 4) (f, g, h) où $f : x \mapsto \sin(x)$, $g : x \mapsto \cos(x)$ et $h : x \mapsto e^x$

Exercice 2

Considérons la famille $B = (Q_1, Q_2, Q_3)$ où $\begin{cases} Q_1 &= X^2 + 1 \\ Q_2 &= 3X^2 - X + 3 \\ Q_3 &= X^2 - X - 1 \end{cases}$

B est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$? Si oui, déterminer les coordonnées de X .

Exercice 3

- 1) $E = F([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$. On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k : x \mapsto \sin^k(x)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.
- 2) $E = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_k : x \mapsto e^{kx}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(g_0, \dots, g_n)$ est libre.

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n . Soit $f \in L(E)$.
Montrer que

$$(\ker(f) = \operatorname{Im}(f)) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } n = 2\operatorname{rg}(f))$$

Exercice 5

Soient F et G deux sev de $\mathbb{R}^5$ tels que $\dim(F) = \dim(G) = 3$.
Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 6

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n . Soient F et G deux sev de E vérifiant $\dim(F) + \dim(G) > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 7

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ et $E = \{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$

1) Montrer que E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

2) Considérons l'application $\varphi : \begin{cases} E & \rightarrow & \mathbb{K}^2 \\ u & \mapsto & (u_0, u_1) \end{cases}$.

Montrer φ est un isomorphisme. Conclure quant à la structure de E .

Exercice 8

Soit E un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension 3. Soit $f \in L(E)$ nilpotent d'indice 3.

1) Justifier l'existence de $x_0 \in E$ tel que $f^2(x_0) \neq 0$.

2) Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de E .

3) En déduire que $rg(f) = 2$.

4) Notons $C_f = \{g \in L(E) | gf = fg\}$

i) Montrer que C_f est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

ii) Montrer que (I_E, f, f^2) est une base de C_f .

Exercice 9

Soit E un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in L(E)$ nilpotent d'indice n .

1) Justifier l'existence de $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.

2) En déduire que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E .

3) Déduire que $rg(f) = n - 1$

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ distincts deux à deux.

Posons pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $L_k(X) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \left(\frac{X - a_j}{a_k - a_j} \right)$

1) Quel est $deg(L_k)$?

2) Calculer $L_k(a_i)$ quand $k = i$ et quand $k \neq i$.

3) Montrer que la famille $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
(dite *base de Lagrange*)

4) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer les coordonnées de celui-ci dans cette base.

Exercice 11

Soient E un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de

E vérifiant $rg(f) = rg(f^2)$.
Montrer que $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

Exercice 12

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E .

- 1) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - i) $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$
 - ii) $E = \ker(f) + \operatorname{Im}(f)$
 - iii) $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$
- 2) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - i) $\ker(f) = \ker(f^2)$
 - ii) $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$
 - iii) $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$
- 3) Soit f' la restriction de f à $\operatorname{Im}(f)$.
 - i) Montrer que $\ker(f') = \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Im}(f') = \operatorname{Im}(f^2)$
 - ii) En déduire que $rg(f) = rg(f^2) + \dim(\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f))$

Exercice 13

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in L(E)$.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $I_p = \operatorname{Im}(u^p)$ et $K_p = \ker(u^p)$.

- 1) Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, K_p \subset K_{p+1} \text{ et } I_{p+1} \subset I_p$$
- 2) Supposons que u est injectif.
Déterminer I_p et K_p , pour tout $p \in \mathbb{N}$.
- 3) Supposons que u est non injectif.
 - i) Montrer que : $(\exists 0 \preceq p \preceq n \mid K_p = K_{p+1})$
Indice : Vous pouvez raisonner par l'absurde, puis introduire la dimension.
 r désignera le plus petit entier $0 \preceq p \preceq n$ vérifiant $K_p = K_{p+1}$.
 - ii) Montrer que :
 - a) $I_r = I_{r+1}$
 - b) $\forall p \in \mathbb{N}, K_r = K_{r+p}$
 - iii) En déduire que $(\forall p \in \mathbb{N}, I_r = I_{r+p})$
 - 4) Montrer que $E = K_r \oplus I_r$

Exercice 14

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $f, g \in L(E, \mathbb{K})$.

Montrer que

$$\ker(f) = \ker(g) \Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{K}^*, g = \alpha f)$$

Exercice 15

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f, g \in L(E)$ vérifiant $fg - gf = I_E$.

1) Montrer que

i) $\forall n \geq 1, fg^n - g^n f = ng^{n-1}$

ii) $\forall n \geq 1, f^n g - gf^n = nf^{n-1}$

2) Montrer que pour tout $n \geq 1$, les familles suivantes sont libres :

$$(I_E, f, \dots, f^n) \text{ et } (I_E, g, \dots, g^n)$$

3) En déduire que E est de dimension infinie.

4) On veut un exemple.

Vérifier que $(E = \mathbb{R}[X], f(P) = P' \text{ et } g(P) = XP)$ convient.

CORRECTION

CORRECTION

CORRECTION

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, les familles suivantes sont-elles libres ?

1) (f, g, h) où $f : x \mapsto \sin(x)$, $g : x \mapsto \cos(x)$ et $h : x \mapsto 1$

1) Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Supposons que $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$

Alors que $\alpha = \beta = \gamma = 0$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0$

$\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin(x) + \beta \cos(x) + \gamma = 0)$ (2)

Pour $x = 0$ et $x = \pi$, on obtient $\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ -\beta + \gamma = 0 \end{cases}$

D'où $(\beta = 0 \text{ et } \gamma = 0)$

(2) devient : $(\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin(x) = 0)$

et $x = \pi/2 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

Enfin la famille est libre

2) (f, g, h, i) où $f : x \mapsto \sin(x)$, $g : x \mapsto \cos(x)$, $h : x \mapsto x \sin(x)$ et $i : x \mapsto x \cos(x)$

2) Soient $\alpha, \beta, \lambda, \delta \in \mathbb{R}$.

Supp que $\alpha f + \beta g + \lambda h + \delta i = 0$

Alors que $\alpha = \beta = \lambda = \delta = 0$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin(x) + \beta \cos(x) + \lambda x \sin(x) + \delta x \cos(x) = 0)$ (Σ)

$x = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$

(Σ) devient : $(\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin(x) + \lambda x \sin(x) + \delta x \cos(x) = 0)$

$x = \pi \Rightarrow \boxed{\delta = 0}$

(Σ) devient : $(\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin(x) + \lambda x \sin(x) = 0)$

On veut se débarrasser de $\sin(x)$.

Alors $(\forall x \in]0, \pi[, \alpha + \lambda x = 0)$ (car $\sin x \neq 0$ sur $]0, \pi[$)

D'où $\boxed{\alpha = \lambda = 0}$, car le polynôme $(\alpha + \lambda x)$ possède une infinité de racine

3) (f, g, h) où $f : x \mapsto \sin^2(x)$, $g : x \mapsto \cos^2(x)$ et $h : x \mapsto 1$

3) On a : $(\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1)$

$$\Rightarrow (1 + g - h = 0)$$

et donc (f, g, h) est liée

4) (f, g, h) où $f : x \mapsto \sin(x)$, $g : x \mapsto \cos(x)$ et $h : x \mapsto e^x$

4) Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Supposons que $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$

Il que $\alpha = \beta = \gamma = 0$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin(x) + \beta \cos(x) + \gamma e^x = 0)$ 12

Plusieurs méthodes sont possibles :

→ via les deux limites de $\sin(x)$, $\cos(x)$ et e^x .
obtenir un système d'inconnues $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

→ en donnant à x trois valeurs, obtenir un système d'inconnues $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

→ Utiliser le fait que $\cos$ et $\sin$ sont deux fonctions bornées, alors que $x \mapsto e^x$ non

Appliquons cette dernière piste.

On a $(\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin(x) + \beta \cos(x) = -\gamma e^x)$

Or $\sin$ et $\cos$ sont bornées alors $(\alpha \sin + \beta \cos)$ aussi

$\Rightarrow$ la fonction $x \mapsto -\gamma e^x$ est bornée

D'où $\gamma = 0$, car sinon, la fonction $x \mapsto -\gamma e^x$ ne serait pas bornée, car $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\gamma e^x = \pm\infty$

② devient : $(\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin(x) + \beta \cos(x) = 0)$

$$\gamma = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$$

$$\gamma = \pi/2 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

Enfin, la famille est libre

Exercice 2

Considérons la famille $B = (Q_1, Q_2, Q_3)$ où $\begin{cases} Q_1 = X^2 + 1 \\ Q_2 = 3X^2 - X + 3 \\ Q_3 = X^2 - X - 1 \end{cases}$

B est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$? Si oui, déterminer les coordonnées de X .

1) B est une base, en effet

$\text{Card}(B) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$, alors il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Supposons que $\alpha Q_1 + \beta Q_2 + \gamma Q_3 = 0$

Alors que $\alpha = \beta = \gamma = 0$

$$\text{On a } \alpha Q_1 + \beta Q_2 + \gamma Q_3 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(X^2 + 1) + \beta(3X^2 - X + 3) + \gamma(X^2 - X - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ -\beta - \gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{on résout le système sans} \\ \text{la méthode de Gauss} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ \beta = -\gamma \\ \alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2\gamma = 0 \\ \beta = -\gamma \\ \alpha - 4\gamma = 0 \end{cases} \quad (\text{premier par } -\gamma)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2\gamma \\ \alpha = 4\gamma \\ \beta = -\gamma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\gamma = 4\gamma \\ \alpha = 2\gamma \\ \beta = -\gamma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \quad \text{CQFD}$$

2) Notons (x, y, z) les coordonnées de X dans la base B .

On a par définition: $X = xQ_1 + yQ_2 + zQ_3$

$$\Rightarrow X = x(x^2 + 1) + y(3x^2 - x + 3) + z(x^2 - x - 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ -y - z = 1 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Résolvons le système via la} \\ \text{méthode de Gauss} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ -y - z = 1 \\ -2z = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Conclusion: Les coordonnées de X dans la base (Q_1, Q_2, Q_3) sont $(3, -1, 0)$.

Exercice 5:

1) $E = F([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$. On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k : x \mapsto \sin^k(x)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.

1) Soit $d_0, \dots, d_n \in \mathbb{R}$.

Supposons que $d_0 f_0 + \dots + d_n f_n = 0$

alors que $d_0 = \dots = d_n = 0$

$$\text{On a } \left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sum_{k=0}^n d_k f_k(x) = 0 \right)$$

$$\Rightarrow \left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sum_{k=0}^n d_k (\sin(x))^k = 0 \right)$$

$$\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) \in [0, 1] \right)$$



$$\text{D'où } \left(\forall t \in [0, 1], \sum_{k=0}^n d_k t^k = 0 \right)$$

Le polynôme $\left(\sum_{k=0}^n d_k x^k \right)$ possède donc une infinité de racines, donc il est nul.

$$\text{D'où } \left(\forall 0 \leq k \leq n, d_k = 0 \right) \text{ CQFD}$$

2) $E = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_k : x \mapsto e^{kx}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(g_0, \dots, g_n)$ est libre.

Soit $d_0, \dots, d_n \in \mathbb{R}$.

Supposons que $d_0 g_0 + \dots + d_n g_n = 0$

alors que $d_0 = \dots = d_n = 0$

$$\text{On a } \left(\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n d_k g_k(x) = 0 \right)$$

$$\Rightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n d_k e^{kx} = 0 \right)$$

$$\Rightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n d_k (e^x)^k = 0 \right)$$

$$\text{Or } \left(\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0 \right)$$

$$\text{alors } \left(\forall t \in]0, +\infty[, \sum_{k=0}^n d_k t^k = 0 \right)$$

Le polynôme $\sum_{k=0}^n d_k x^k$ possède donc une infinité de racines, donc il est nul.

$$\text{alors } \left(\forall 0 \leq k \leq n, d_k = 0 \right) \text{ CQFD}$$

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n . Soit $f \in L(E)$.

Montrer que

$$(\ker(f) = \operatorname{Im}(f)) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } n = 2\operatorname{rg}(f))$$

Exercice 4

($\Rightarrow$)

1) $f^2 = 0$?

Soit $x \in E$. $\cap$ que $f^2(x) = 0$.

On a $f(x) \in \operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Im}(f) = \ker(f)$

Donc $f(x) \in \ker(f)$

$$\Rightarrow f(f(x)) = 0, \text{ c'ad } \underline{f^2(x) = 0}$$

2) $n = 2\operatorname{rg}(f)$?

D'après le théorème du rang on a :

$$\underbrace{\dim(E)}_{=n} = \underbrace{\dim(\ker(f))}_{=\dim(\operatorname{Im}(f))=\operatorname{rg}(f)} + \operatorname{rg}(f)$$

$$\text{D'où } \boxed{n = 2\operatorname{rg}(f)}$$

($\Leftarrow$) $\ker(f) = \operatorname{Im}(f)$?

$$\text{On a } f^2 = 0 \Rightarrow \forall x \in E, f(f(x)) = 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in E, f(x) \in \ker(f)$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Im}(f) \subset \ker(f)}$$

et d'après le théorème du rang, on a :

$$n = \dim(\ker(f)) + \operatorname{rg}(f)$$

et vu que $n = \text{rg}(f)$

Alors $\dim(\ker(f)) = \text{rg}(f)$

Ainsi $\left\{ \begin{array}{l} \text{Im}(f) \subset \ker(f) \\ \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\ker(f)) \end{array} \right.$

D'où $\text{Im}(f) = \ker(f)$

Exercice 5

Soient F et G deux sev de $\mathbb{R}^5$ tels que $\dim(F) = \dim(G) = 3$.
Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 5

Raisonnons par l'absurde et supposons que $F \cap G = \{0\}$

Alors $\dim(F+G) = \underbrace{\dim(F)}_{=3} + \underbrace{\dim(G)}_{=3}$

$\Rightarrow \dim(F+G) = 6 > \dim(\mathbb{R}^5)$

Ce qui est absurde car $(F+G)$ sev de $\mathbb{R}^5$ et
que $\dim(\mathbb{R}^5) = 5$.

Exercice 6 :

Solution calquée sur celle de (Exercice 5)

Exercice 8

1) f est nilpotent d'indice 3

Donc ($f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$)

$$f^2 \neq 0 \Rightarrow (\exists x_0 \in E, f^2(x_0) \neq 0)$$

2) Il suffit de montrer que la $f^k(x_0, f(x_0), f^2(x_0)) = B$ est libre Car $\text{Card}(B) = \dim(E) (=3)$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in K$ tels que : $\alpha x_0 + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0) = 0$
Montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$

$$\begin{aligned} (\Sigma) &\Rightarrow f^2(\alpha x_0 + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0)) = 0 \\ &\Rightarrow \alpha f^2(x_0) + \beta \underbrace{f^3(x_0)}_{=0} + \gamma \underbrace{f^4(x_0)}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha \underbrace{f^2(x_0)}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

$$(\Sigma) \text{ devient : } \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0) = 0$$

$$\text{Introduisons } f, \text{ on aura : } \beta f^2(x_0) + \gamma \underbrace{f^3(x_0)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \beta \underbrace{f^2(x_0)}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = 0}$$

$$(\Sigma) \text{ devient : } \gamma f^2(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = 0} \text{ ; car } f^2(x_0) \neq 0$$

$$3) \operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f)).$$

$$\text{On a } \begin{cases} B = (x_0, f(x_0), f^2(x_0)) \text{ base de } E \\ f \in \mathcal{L}(E) \end{cases}$$

D'où $f(B) = (f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f)$

$$\text{or } f^3(x_0) = 0, \text{ alors } \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(x_0), f^2(x_0))$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\operatorname{Vect}(f(x_0), f^2(x_0)))$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f(x_0), f^2(x_0))$$

Or $(f(x_0), f^2(x_0))$ est libre comme sous-famille de la famille libre $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$

$$\text{D'où } \operatorname{rg}(f(x_0), f^2(x_0)) = 2$$

$$\text{Enfin } \boxed{\operatorname{rg}(f) = 2}$$

$$4) g \in C_f \stackrel{\text{d'f}}{\iff} gf = fg$$

i) Il suffit de montrer que C_f est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$

$$(a) 0 \in C_f, \text{ car } 0f = 0 \text{ et } f \cdot 0 = 0$$

$$(b) \text{ Soient } g \text{ et } g' \in C_f$$

$$\text{Soit } \lambda \in K$$

$$\text{Montrer que } (\lambda g + g') \in C_f.$$

$$\begin{aligned} \text{On a: } \boxed{(\lambda g + g')f} &= \lambda gf + g'f \\ &= \lambda fg + fg' \\ &= \boxed{f(\lambda g + g')} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } (\lambda g + g') \in C_f.$$

Ainsi C_f est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$

ii) (I_E, f, f^2) base de C_f ?

a) Libre ?

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in K$.

Supposons que $\alpha I_E + \beta f + \gamma f^2 = 0$

Alors que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$$\text{On a } (\alpha I_E + \beta f + \gamma f^2 = 0)$$

$$\Rightarrow \alpha x_0 + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \text{ (car } (x_0, f(x_0), f^2(x_0)) \text{ libre)}$$



b) Génératrice ?

Soit $g \in C_f$.

Alors qu'il existe $a, b, c \in K$ tels que :

$$g = aI_E + b f + c f^2$$

On a $g(x_0) \in E$ et $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ base de E

Donc l'existence de a, b et $c \in K$ tels que :

$$g(x_0) = a x_0 + b f(x_0) + c f^2(x_0) \quad \Omega$$

Montrons que : $\{g = aI_E + b f + c f^2\}$

Il suffit de montrer que g et $(aI_E + b f + c f^2)$ sont égales en tous les vecteurs de la base $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$.

A) $g = aI_E + b f + c f^2$ en x_0 :

On a $g(x_0) = a x_0 + b f(x_0) + c f^2(x_0)$ et après Ω

B) $q = aI_E + bf + cf^2$ en $f(x_0)$?

On a $(aI_E + bf + cf^2)(f(x_0)) \stackrel{(w)}{=} a f(x_0) + b f^2(x_0) + c f^3(x_0)$

Et on a $g(f(x_0)) = f(g(x_0))$ (car $gf = fg$)

Or $g(x_0) = a x_0 + b f(x_0) + c f^2(x_0)$

Alors $g(f(x_0)) \stackrel{(w)}{=} a f(x_0) + b f^2(x_0) + c f^3(x_0)$

De (w) et (w') on conclut.

C) $q = aI_E + bf + cf^2$ en $f^2(x_0)$?

On a $(aI_E + bf + cf^2)(f^2(x_0)) \stackrel{(w)}{=} a f^2(x_0) + b f^3(x_0) + c f^4(x_0)$

Et on a $g(f^2(x_0)) = f^2(g(x_0))$ (car $gf = fg$)

Or $g(x_0) = a x_0 + b f(x_0) + c f^2(x_0)$

Alors $g(f^2(x_0)) \stackrel{(w)}{=} a f^2(x_0) + b f^3(x_0) + c f^4(x_0)$

De (w) et (w') on conclut.

Exercice 9

1) On a l'endomorphisme d'indice n
 $\Rightarrow (f^n = 0 \text{ et } f^{n-1} \neq 0)$
 $f^{n-1} \neq 0 \Leftrightarrow (\exists x_0 \in E, f^{n-1}(x_0) \neq 0)$

2) $\text{Card}(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)) = \dim(E) (=n)$
 Donc il suffit de montrer que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre.
 Soit alors $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in K$ tels que :

$$(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 f(x_0) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0) \quad (2)$$

Montrons que $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$.

Composons par f^{n-1} dans (2). On obtient :

$$\alpha_0 f^{n-1}(x_0) + \alpha_1 \underbrace{f^n(x_0)}_{=0} + \dots + \alpha_{n-1} \underbrace{f^{2n-2}(x_0)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_0 f^{n-1}(x_0) = 0$$

et puisque $f^{n-1}(x_0) \neq 0$, alors $\boxed{\alpha_0 = 0}$.

(2) devient : $\alpha_1 f(x_0) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0$

Composons par f^{n-2} , on obtient :

$$\alpha_1 f^{n-2}(x_0) = 0 ; \text{ car } f^n = f^{n+1} = \dots = 0$$

et $f^{n-2}(x_0) \neq 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0}$

(2) devient : $\alpha_2 f^2(x_0) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-2}(x_0) = 0$

On compose par f^{n-3} , on obtient $\alpha_2 \underbrace{f^{n-1}(x_0)}_{\neq 0} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 0}$$

De proche en proche, on annulera tous les α_k .

$$3) \operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f))$$

$B = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ base de E

Donc $f(B) = (f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0))$ f ^{1^{re} génératrice de $\operatorname{Im}(f)$}

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), 0)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$$

$$\text{D'où } \operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Vect}(f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))) \\ = \operatorname{rg}(f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$$

D'autre part, $(f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est **libre** car sous-famille de la famille libre

$(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$.

$$\text{D'où } \operatorname{rg}(f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)) = n-1$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(f) = n-1$$

6 x 4 à 10

$$1) \deg(L_k) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \overbrace{\deg\left(\frac{x-a_j}{a_k-a_j}\right)}^{=1} = n$$

$$2) L_k(a_i) = 1 \text{ si } k=i; \text{ car } L_k(a_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \left(\frac{a_k-a_j}{a_k-a_j}\right) = 1$$

$$L_k(a_i) = 0 \text{ si } k \neq i; \text{ car } a_i \text{ est une racine de } L_k(x)$$

3) Il suffit de m que $B = (L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre, car $\text{card}(B) = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[x])$.

Soit alors $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=0}^n \alpha_k L_k = 0$

M que $\alpha_0 = \dots = \alpha_n = 0$

Soit $0 \leq i \leq n$. M que $\alpha_i = 0$.

$$\text{On a } \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k(a_i) = 0$$

$$\text{Or } (\forall k \neq i, L_k(a_i) = 0)$$

$$\text{Alors } \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k(a_i) = \alpha_i L_i(a_i)$$

$$\text{Et donc } \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k L_k(a_i) = 0 \right) \Rightarrow \alpha_i \underbrace{L_i(a_i)}_{=1} = 0 \Rightarrow \underline{\alpha_i = 0} \text{ CQFD}$$

4) Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$.

Notons $x_0, \dots, x_n$ les coordonnées de P dans la base $(L_0, \dots, L_n)$.

$$\text{On a } P = x_0 L_0 + \dots + x_n L_n = \sum_{k=0}^n x_k L_k$$

Soit $i \in \{0, \dots, n\}$, déterminons x_i :

$$\text{On a } P(a_i) = \sum_{k=0}^n x_k L_k(a_i) = x_i \underbrace{L_i(a_i)}_{=1} \quad \left(\begin{array}{l} \text{(car } \forall k \neq i, \\ L_k(a_i) = 0 \end{array} \right)$$

$$\text{Donc : } \forall 0 \leq i \leq n, x_i = P(a_i)$$

Exercice 11

On a :

$$\dim(E) = n$$

$$f \in \mathcal{L}(E) : \operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f^2)$$

On veut montrer que $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$

Il s'agit de montrer que

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\} \\ 2) \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\} \\ 2) \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) \end{array} \right.$$

Car E est de dimension finie.

Pour 2) ça provient du théorème du rang.

Pour 1) :

Soit $x \in \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$. Montrons que $x = 0$:

$$\text{On a } \operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f^2)$$

$$\text{Et on a } \left\{ \begin{array}{l} \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \operatorname{rg}(f) \\ \dim(E) = \dim(\ker(f^2)) + \operatorname{rg}(f^2) \end{array} \right.$$

$$\text{D'où } \dim(\ker(f)) = \dim(\ker(f^2))$$

$$\text{Or } \ker(f) \subset \ker(f^2)$$

$$\text{Car } x \in \ker(f) \Rightarrow f(x) = 0$$

$$\Rightarrow f^2(x) = 0$$

$$\Rightarrow x \in \ker(f^2)$$

$$\text{Alors } \ker(f) = \ker(f^2)$$

$$\text{On a } x \in \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ \exists t \in E, x = f(t) \end{array} \right.$$

$$x = f(t) \Rightarrow f(x) = f^2(t)$$

$$\text{et } f(x) = 0 \Rightarrow f^2(t) = 0$$

$$\Rightarrow t \in \ker(f^2)$$

$$\Rightarrow t \in \ker(f)$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(t)}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{x = 0}_{\text{CQFD}}$$

Exercice 12

$$\text{i) } \ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$$

$$\text{ii) } E = \ker(f) + \text{Im}(f)$$

$$\text{iii) } E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$$

1) i) $\Rightarrow$ ii) ?

Supposons que $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.

Montrons que: $E = \ker(f) + \text{Im}(f)$

$(\ker(f) + \text{Im}(f))$ est un sev de E , alors il suffit de montrer que $\dim(\ker(f) + \text{Im}(f)) = \dim(E)$

Et on a:

$$\begin{aligned} \dim(\ker(f) + \text{Im}(f)) &= \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } \ker(f) \text{ et} \\ \text{Im}(f) \text{ en somme} \\ \text{directe} \end{array} \right) \\ &= \dim(E) \quad (\text{d'après thm d'isomorphisme}) \end{aligned}$$

ii) $\Rightarrow$ iii) ?

$$\text{On a } E = \ker(f) + \text{Im}(f)$$

Et on veut montrer que $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Il reste à montrer que $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$

$$\text{On a } \dim(E) = \dim(\ker(f) + \text{Im}(f))$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) - \dim(\ker(f) \cap \text{Im}(f)) \\ \text{d'après la formule de Grassmann} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \dim(\ker(f) \cap \text{Im}(f)) = 0 \quad (\text{d'après le thm d'isomorphisme})$$

$$\text{D'où } \ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\} \quad \text{CQFD}$$

iii) $\Rightarrow$ i) évidente

- i) $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$
- ii) $E = \ker(f) + \operatorname{Im}(f)$
- iii) $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$

2) i) $\Rightarrow$ ii)?

- i) $\ker(f) = \ker(f^2)$
- ii) $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$
- iii) $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$

On a $\ker(f) = \ker(f^2)$
Et on veut montrer que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$
D'après le théorème du rang appliqué à f , on a

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$$

Et d'après le théorème du rang appliqué à f^2 , on a

$$\dim(E) = \dim(\ker(f^2)) + \dim(\operatorname{Im}(f^2))$$

Et puisque $\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(f^2))$

Alors $\dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\operatorname{Im}(f^2))$

Or $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$

Car $y \in \operatorname{Im}(f^2) \Rightarrow \exists t \in E, y = f^2(t)$
 $\Rightarrow y = f(f(t)) \in \operatorname{Im}(f)$

D'où $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$

ii) $\Rightarrow$ iii)?

En procédant comme ci-dessus, on tire que
 $\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(f^2))$

Or $\ker(f) \subset \ker(f^2)$

Alors $\ker(f) = \ker(f^2)$

On veut montrer que $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

Il s'agit de montrer que $\begin{cases} 1) \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\} \\ 2) \dim(E) = \dim \ker(f) + \dim \operatorname{Im}(f) \end{cases}$

Pour 2) ça vient du théorème du rang.

Alors il reste à montrer que $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$.

Soit alors $x \in \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$. Montrer que $x = 0$.

$$\text{On a } x \in \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ \exists t \in E, x = f(t) \end{cases}$$

$$(x = f(t)) \Rightarrow f(x) = f^2(t)$$
$$\text{et } f(x) = 0 \Rightarrow f^2(t) = 0$$

$$\Rightarrow t \in \ker(f^2)$$

$$\Rightarrow t \in \ker(f) \quad (\text{car } \ker(f) = \ker(f^2))$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(t)} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{x = 0}_{\text{CQFD}}$$

iii) $\Rightarrow$ i)

On a : $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

On veut montrer que $\ker(f) = \ker(f^2)$

• Montrer que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$:

$$\text{On a : } x \in \ker(f) \Rightarrow f(x) = 0$$

$$\Rightarrow f^2(x) = 0$$

$$\Rightarrow x \in \ker(f^2)$$

• Montrer que $\ker(f^2) \subset \ker(f)$:

Soit $x \in \ker(f^2)$. Montrer que $x \in \ker(f)$.

$$\text{On a } f^2(x) = 0 \Rightarrow f(f(x)) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \in \ker(f)$$

Or $f(x) \in \operatorname{Im}(f)$, alors $f(x) \in \operatorname{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$

$$\Rightarrow f(x) = 0$$

$$\Rightarrow x \in \ker(f)$$

3) i)

$$f' : \operatorname{Im}(f) \longrightarrow E$$

$$x \mapsto f'(x) = f(x)$$

a) M. que $\ker(f') = \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$:

$$\ker(f') \stackrel{\text{d'f}}{=} \{x \in \operatorname{Im}(f) / f'(x) = 0\}$$

$$= \{x \in \operatorname{Im}(f) / f(x) = 0\}$$

$$= \{x \in \operatorname{Im}(f) / x \in \ker(f)\} = \operatorname{Im}(f) \cap \ker(f)$$

b) M. que $\operatorname{Im}(f') = \operatorname{Im}(f^2)$

$$\operatorname{Im}(f') \stackrel{\text{d'f}}{=} \{f'(x) / x \in \operatorname{Im}(f)\}$$

$$= \{f(x) / x \in \operatorname{Im}(f)\}$$

$$= \{f(f(t)) / t \in E\}$$

$$= \operatorname{Im}(f^2)$$

ii) D'ailleurs que $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f^2) + \dim(\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f))$

Appliquons le théorème du rang à $f' : \operatorname{Im}(f) \longrightarrow E$
 $x \mapsto f'(x) = f(x)$

$$\text{On a } \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\ker(f')) + \dim(\operatorname{Im}(f'))$$

$$\text{or } \left\{ \begin{array}{l} \ker(f') = \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) \\ \operatorname{Im}(f') = \operatorname{Im}(f^2) \end{array} \right.$$

$$\text{Alors } \operatorname{rg}(f) = \dim(\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)) + \operatorname{rg}(f')$$

Exercice 13

1) i) $K_p \subset K_{p+1}$?

$$\begin{aligned}x \in K_p &\Rightarrow u^p(x) = 0 \\&\Rightarrow u(u^p(x)) = 0 \\&\Rightarrow u^{p+1}(x) = 0 \\&\Rightarrow x \in K_{p+1}\end{aligned}$$

ii) $I_{p+1} \subset I_p$?

$$x \in I_{p+1} \Rightarrow (\exists t \in E, x = u^{p+1}(t))$$

$$\Rightarrow x = u^p(u(t)) \in \text{Im}(u^p) = I_p$$

2) Supposons que u est injectif :

i) $I_p = ?$

$$I_p = \text{Im}(u^p) \text{ et } u^p \in \mathcal{L}(E)$$

$$u \text{ injectif} \Rightarrow u^p \text{ est injectif}$$

et E de dimension finie

$$\text{d'où } \text{Im}(u^p) = E$$

$$\text{Càd } I_p = E$$

ii) $K_p = ?$

$$\text{On a } K_p = \text{Ker}(u^p) \text{ et } u^p \text{ injectif}$$

$$\text{d'où } K_p = \{0\}$$

$$\dim(E) = n$$

$$u \in \mathcal{L}(E)$$

$$I_p = \text{Im}(u^p); K_p = \text{Ker}(u^p)$$

3) Supposons que u n'est pas injectif.

i) M que : $(\exists 0 \leq p \leq n, K_p = K_{p+1})$

Raisonnons par l'absurde, et supposons que :

$$(\forall 0 \leq p \leq n, K_p \neq K_{p+1})$$

Or K_p est un soc de K_{p+1} Car $K_p \subset K_{p+1}$

Alors $(\forall 0 \leq p \leq n, \dim(K_p) \leq \dim(K_{p+1}))$

Et puisque $K_p \neq K_{p+1}$, alors :

$$(\forall 0 \leq p \leq n, \dim(K_p) < \dim(K_{p+1}))$$

Ainsi $\left\{ \begin{array}{l} \dim(K_0) < \dim(K_1) \\ \dim(K_1) < \dim(K_2) \\ \vdots \\ \dim(K_n) < \dim(K_{n+1}) \end{array} \right.$

Car $\left\{ \begin{array}{l} \dim(K_0) \leq \dim(K_1) - 1 \\ \dim(K_1) \leq \dim(K_2) - 1 \\ \vdots \\ \dim(K_n) \leq \dim(K_{n+1}) - 1 \end{array} \right.$

Par sommation et simplifications, on obtient :

$$\dim(K_0) \leq \dim(K_{n+1}) - (n+1)$$

D'autre part, $K_0 = \ker(u^0) = \ker(I_E) = \{0\}$

Donc $\dim(K_0) = 0$.

Enfin $(\dim(K_{n+1}) \geq n+1)$

Ce qui est absurde, car K_{n+1} seve de E et $\dim(E)=n$

ii) a) $I_n = I_{n+1}$?

ii) Montrer que :

a) $I_r = I_{r+1}$

b) $\forall p \in \mathbb{N}, K_r = K_{r+p}$

On a $K_n = K_{n+1}$

Appliquons le théorème du rang aux endomorphes u^n et u^{n+1} , on a

$$\begin{cases} \dim(E) = \dim(K_r) + \dim(I_r) \\ \dim(E) = \dim(K_{n+1}) + \dim(I_{n+1}) \end{cases}$$

D'où $\dim(I_n) = \dim(I_{n+1})$

Or I_{n+1} est un seve de I_n , car $I_{n+1} \subset I_n$

D'où $I_{n+1} = I_n$

b) Montrer que : $(\forall p \in \mathbb{N}, K_n = K_{n+p})$

Faisons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Pour $p=0$ (Evidente)

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $K_n = K_{n+p}$ et montrons que $K_n = K_{n+p+1}$

★ $K_n \subset K_{n+p+1}$?

On a $K_n = K_{n+p} \subset K_{n+p+1}$ d'après 1°)

★ $K_{n+p+1} \subset K_n$?

Soit $x \in K_{n+p+1}$. Montrons que $x \in K_n$.

On a $x \in K_{n+p+1} \Rightarrow u^{n+p+1}(x) = 0$

$\Rightarrow u^{n+p}(u(x)) = 0$

$\Rightarrow u(x) \in K_{n+p}$

$\Rightarrow u(x) \in K_n$ (Hypothèse de récurrence)

$\Rightarrow u^n(u(x)) = 0$

$$\Rightarrow M^{n+1}(x) = 0$$

$$\Rightarrow x \in K_{n+1} = K_n$$

iii) Soit $p \in \mathbb{N}$. M que $I_n = I_{n+p}$.

D'après le théorème du rang appliqué aux endomorphismes

$$u^n \text{ et } u^{n+p}, \text{ on a: } \begin{cases} \dim(E) = \dim(K_r) + \dim(I_r) \\ \dim(E) = \dim(K_{n+p}) + \dim(I_{n+p}) \end{cases}$$

Or $K_n = K_{n+p}$ d'après 3/ii/b)

$$\text{Alors } \dim(I_n) = \dim(I_{n+p})$$

Et puis que I_{n+p} est un s.e. de I_n (car $I_{n+p} \subset I_n$)

$$\text{Alors } I_{n+p} = I_n$$

4) Il s'agit de montrer que :

4) Montrer que $E = K_r \oplus I_r$

$$\begin{cases} \text{i) } K_n \cap I_n = \{0\} \\ \text{ii) } \dim(E) = \dim(K_n) + \dim(I_n) \end{cases}$$

ii) provient du théorème du rang.

Montrons i)

Soit alors $x \in K_n \cap I_n$. M que $x = 0$.

$$\text{On a } \begin{cases} u^n(x) = 0 \\ \exists t \in E, x = u^n(t) \end{cases}$$

$$\text{Et } x = u^n(t) \Rightarrow u^n(x) = u^{2n}(t)$$

$$\text{Avec } u^n(x) = 0, \text{ on a } u^{2n}(t) = 0$$

$$\Rightarrow t \in K_{2n}$$

$$\Rightarrow t \in K_n \text{ car } K_{2n} = K_n \text{ (3/ii/b)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{u^n(t)}_{=x} = 0 ; \text{ En fin } x = 0$$

Exercice 14

f et $g \in \mathcal{L}(E, K)$
 $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$

$$\ker(f) = \ker(g) \Leftrightarrow (\exists \alpha \in K^*, g = \alpha f)$$

($\Leftarrow$) On a $(\exists \alpha \in K^*, g = \alpha f)$
 M que $\ker(f) = \ker(g)$:

$$x \in \ker(g) \Leftrightarrow g(x) = 0 \quad x \in \ker(f)$$

$$\Leftrightarrow \alpha f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0 \quad (\text{car } \alpha \in K^*)$$

$$\Leftrightarrow x \in \ker(f)$$

Donc $\ker(f) = \ker(g)$

($\Rightarrow$) Supp que: $\ker(f) = \ker(g)$
 M qu'il existe $\alpha \in K^*$ tel que $g = \alpha f$:

On a $\ker(f)$ so de E .

Soit G un so supplémentaire de $\ker(f)$

$$\text{On a } E = \ker(f) \oplus G$$

Notons que pour tout $\alpha \in K$, on a:

$$g = \alpha f \Leftrightarrow \begin{cases} g = \alpha f \text{ sur } \ker(f) \\ g = \alpha f \text{ sur } G \end{cases}$$

f et sur $\ker(f)$, on a bien $g = \alpha f$

Reste à montrer qu'il existe $\alpha \in K^*$ tel que $g = \alpha f$ sur G .

D'autre part, d'après le théorème du rang, on a:

$$n = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

$$\text{Et } E = \ker(f) \oplus G \Rightarrow n = \dim(\ker(f)) + \dim(G)$$

D'où $\dim(G) = \dim(\text{Im}(f)) \in \{0, 1\}$

(car $\text{Im}(f)$ sous- $\mathbb{K}$).

Cas 1 : Si $\dim(G) = 0$

Alors $G = \{0\}$

Tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$ convient.

$$\begin{cases} \forall x \in G = \{0\}, g(x) = 0 \\ \forall x \in G = \{0\}, \alpha f(x) = 0 \end{cases}$$

Cas 2 Si $\dim(G) = 1$

$\Rightarrow (\exists a \in E \setminus \{0\}, G = \text{Vect}(a))$

(On cherche $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $g = \alpha f$ sur $\text{Vect}(a)$).

$$\text{On a } (g = \alpha f \text{ sur } \text{Vect}(a)) \stackrel{!}{\Leftrightarrow} g(a) = \alpha \cdot f(a)$$
$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{g(a)}{f(a)}$$

Pour finir et dire que $\alpha = \frac{g(a)}{f(a)}$ convient, on doit vérifier que $f(a) \neq 0$ et que $g(a) \neq 0$.

On a $G \cap \text{Ker}(f) = \{0\} \Rightarrow \text{Vect}(a) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$

Or $(a \in \text{Vect}(a) \text{ et } a \neq 0)$

Alors $a \notin \text{Ker}(f)$

$$\Rightarrow f(a) \neq 0$$

Et aussi $g(a) \neq 0$ (car $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$)

1) Montrer que

i) $\forall n \geq 1, fg^n - g^n f = ng^{n-1}$

ii) $\forall n \geq 1, f^n g - g f^n = n f^{n-1}$

$f, g \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :
 $fg - gf = I_E$
(hypothèse)

Exercice 15

i) Par récurrence sur $n \geq 1$.

Initialisation : Pour $n=1$.

$$\text{On a } \begin{cases} fg^1 - g^1 f = fg - gf = I_E \\ 1 \cdot g^{1-1} = g^0 = I_E \end{cases}$$

Abs la propriété est vraie pour $n=1$

Hérédité :

Soit $n \geq 1$. Supposons que $(fg^n - g^n f = ng^{n-1})$

et montrons que $(fg^{n+1} - g^{n+1}f = (n+1)g^n)$

On a :

$$\begin{aligned} fg^{n+1} &= (fg^n)g \\ &= (g^n f + ng^{n-1})g \quad (\text{d'après l'hypothèse de récurrence}) \\ &= g^n (fg) + ng^n \\ &= g^n (gf + I_E) + ng^n \\ &= g^{n+1}f + (n+1)g^n \end{aligned}$$

On finit $fg^{n+1} - g^{n+1}f = (n+1)g^n$

ii) Pareil à i)

2)

i) Montrer que, $(\forall n \geq 1, (I_E, f_1, \dots, f^n)$ est libre)
 Par récurrence sur $n \geq 1$.

Initialisation : Pour $n=1$.

Montrer que (I_E, f) est libre.

Soient $\alpha, \beta \in K$ tels que $\alpha I_E + \beta f = 0$. Ω

Montrer que $\alpha = \beta = 0$.

Composons par g , on aura :

$$\begin{cases} \alpha g + \beta g f = 0 \\ \alpha g + \beta f g = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta (\underbrace{fg - gf}_{= I_E}) = 0$$

$$\Rightarrow \beta I_E = 0$$

D'où $\beta = 0$

Ω devient $\alpha I_E = 0$

D'où $\alpha = 0$

Hérédité

Soit $n \geq 1$.

Supposons que $(I_E, f_1, \dots, f^n)$ est libre.

Et on veut que $(I_E, f_1, \dots, f^{n+1})$ est libre.

Soit alors $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in K$ tels que :

$$(\alpha_0 I_E + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n+1} f^{n+1} = 0) \quad \Omega$$

Montrer que $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n+1} = 0$

Composons dans Ω par g .

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 g + \alpha_1 g f + \dots + \alpha_{n+1} g f^{n+1} = 0 \\ \alpha_0 g + \alpha_1 f g + \dots + \alpha_{n+1} f^{n+1} g = 0 \end{cases}$$

Soustrayons, on aura :

$$\alpha_1 (f g - g f) + \dots + \alpha_{n+1} (f^{n+1} g - g f^{n+1}) = 0$$

$$\text{On } (\forall k \geq 1, f^k g - g f^k = k f^{k-1})$$

$$\text{Alors } \alpha_1 I_E + \dots + \alpha_{n+1} \cdot (n+1) f^n = 0$$

On $(I_E, \dots, f^n)$ est libre, par hypothèse de récurrence

$$\text{D'où } \alpha_1 = \dots = \alpha_{n+1} = 0$$

$$\textcircled{\Omega} \text{ devient } (\alpha_0 I_E = 0)$$

$$\text{D'où } \alpha_0 = 0$$

ii) Pour : $(\forall n \geq 1, (I_E, f, \dots, f^n))$ est libre
C'est pareil à i)

3) En déduire que E est de dimension infinie.

3) Raisonnons par l'absurde et supposons que E est de dimension finie. Notons $\dim(E) = n$

Alors $\mathcal{L}(E)$ est aussi de dimension finie et $\dim(\mathcal{L}(E)) = n^2$

D'après 2°, la famille $(I_E, f, \dots, f^{n^2})$ est une famille libre de l'espace $\mathcal{L}(E)$

$$\text{Donc } \underbrace{\text{Card}(I_E, f, \dots, f^{n^2})}_{= n^2 + 1} < \underbrace{\dim(\mathcal{L}(E))}_{= n^2}$$

Ce qui est absurde

4) On veut un exemple.

Vérifier que $(E = \mathbb{R}[X], f(P) = P' \text{ et } g(P) = XP)$ convient.

Il s'agit de vérifier que ces applications f et g vérifient $f, g \in L(E)$ et $fg - gf = I_E$.

★ Pour $f, g \in \mathcal{L}(E)$: (facile)

★★ Montrer que $fg - gf = I_E$.

Soit alors $x \in E$. Montrer $(fg - gf)(x) = x$:

On a:

$$\checkmark (fg - gf)(x) = f(g(x)) - g(f(x))$$

$$= f(x') - g(x')$$

$$= (x')' - x'$$

$$= (x + x') - x'$$

$$= \underline{x}$$

$$(f(x) = x' \text{ et } g(x) = x')$$

FIN