

EPREUVE DES PETITES MINES, 1996, COMMUN

EXTRAIT

Problème II

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et u un endomorphisme de E . On désigne par $\text{Ker } u$ le noyau de u et $\text{Im } u$ l'image de u . Pour tout entier k strictement positif u^k désigne l'endomorphisme $u \circ u \circ u \circ \dots \circ u$ (k fois) et u^0 désigne l'application identique de E .

Première partie

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soit u l'endomorphisme de E tel que la matrice de u par rapport à cette base est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer le rang de u et donner une base de $\text{Im } u$, une base de $\text{Ker } u$ en fonction des vecteurs de la base B .
- (b) Calculer M^2 , M^3 et montrer que pour tout entier $p \geq 2$, il existe un réel α_p et une matrice A telle que $M^p = \alpha_p A$. Expliciter alors M^p .
- (c) i. Donner une base, en fonction des vecteurs de la base B , de chacun des sous-espaces vectoriels suivants : $\text{Im } u^2$, $\text{Ker } u^2$, $\text{Im } u^3$, $\text{Ker } u^3$

ii. Déterminer :

$$\forall k \geq 2 \quad \text{Ker } u^k \quad \text{et} \quad \text{Im } u^k$$

iii. Montrer que $E = \text{Ker } u^2 \oplus \text{Im } u^2$

2. Soit $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ et d l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui à un polynôme P associe son polynôme dérivé P' .
- (a) d est-il injectif? d est-il surjectif? Comment peut-on en déduire que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie?
- (b) Déterminer

$$\forall q \in \mathbb{N}^* \quad \text{Ker } d^q$$

Deuxième partie

Soit u un endomorphisme de E , pour tout entier naturel p , on notera

$$I_p = \text{Im } u^p \quad \text{et} \quad K_p = \text{Ker } u^p$$

1. Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad K_p \subset K_{p+1} \quad \text{et} \quad I_{p+1} \subset I_p$$

2. On suppose que E est de dimension finie et u injectif. Déterminer

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad I_p \quad \text{et} \quad K_p$$

3. On suppose que E est de dimension finie n non nulle et u non injectif.

- (a) Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leq n$ tel que $K_r = K_{r+1}$.
- (b) Montrer qu'alors $I_r = I_{r+1}$ et que

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad K_r = K_{r+p} \quad \text{et} \quad I_r = I_{r+p}$$

- (c) Montrer que

$$E = K_r \oplus I_r$$

4. Lorsque E n'est pas de dimension finie, existe-t-il un plus petit entier naturel r tel que $K_r = K_{r+1}$?

FIN EXTRAIT

