

EXTRAIT POUR
les premières années



ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Notations

- Dans tout le sujet, n est un entier naturel fixé non nul.
- Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ est un espace probabilisé fini.
- On note $L^0(\Omega)$ le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des variables aléatoires réelles définies sur Ω . On notera que si $X \in L^0(\Omega)$, $X(\Omega)$ est une partie finie de $\mathbf{R}$. On confondra systématiquement variable aléatoire nulle et variable aléatoire presque sûrement nulle.
- Si $X \in L^0(\Omega)$, on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance.
- Une variable aléatoire $X \in L^0(\Omega)$ suit une loi de Rademacher si :

$$X(\Omega) = \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = -1) = \frac{1}{2}.$$

Inégalité de Hölder

Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $X, Y \in L^0(\Omega)$ que l'on suppose toutes les deux positives.

1 ▷ Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}_+, \quad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

2 ▷ En déduire l'inégalité suivante (inégalité de Hölder) :

$$\mathbf{E}(XY) \leq (\mathbf{E}(X^p))^{1/p} (\mathbf{E}(Y^q))^{1/q}.$$

On pourra commencer par traiter le cas où $\mathbf{E}(X^p) = \mathbf{E}(Y^q) = 1$.

Une inégalité de déviation

Soit $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher.

3 ▷ On admet que :

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \end{array} \right\} \leftarrow \begin{array}{l} \text{J'ai ajouté ça pour} \\ \text{rendre la question faisable} \\ \text{pour les premières années} \end{array}$$

Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \operatorname{ch}(t) \leq e^{t^2/2}.$$

4 ▷ Montrer que : pour tout $t \geq 0$, pour tout $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\mathbf{E} \left(\exp \left(t \sum_{i=1}^n c_i X_i \right) \right) \leq \exp \left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2 \right).$$

5 ▷ En déduire que : pour tout $t \geq 0$, pour tout $x \geq 0$ et pour tout $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\mathbf{P} \left(\exp \left(x \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| \right) > e^{tx} \right) \leq 2 e^{-tx} \exp \left(\frac{x^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2} \right).$$

On pourra utiliser l'inégalité de Markov.

6 ▷ Montrer que : pour tout $t \geq 0$ et pour tout $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ non nul,

$$\mathbf{P} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| > t \right) \leq 2 \exp \left(-\frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2} \right).$$

Inégalités de Khintchine

Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher. Soit $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$.

7 ▷ Soit X une variable aléatoire réelle positive et finie. Soit F_X la fonction définie pour tout $t \geq 0$, par

$$F_X(t) = \mathbf{P}(X > t).$$

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t) dt$ converge, puis que

$$\mathbf{E}(X^p) = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t) dt.$$

8 ▷ On suppose dans cette question que $\sum_{i=1}^n c_i^2 = 1$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t^2/2} dt$ converge, puis que

$$\mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^4 \right) \leq 8 \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t^2/2} dt.$$

9 ▷ Montrer que

$$\mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right) = \sum_{i=1}^n c_i^2.$$

Dans les questions numérotées de 10 ▷ à 11 ▷, on suppose $1 \leq p < 2$.

10 ▷ Justifier qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{2} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4}$.

11 ▷ Montrer que

$$\mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right) \leq \mathbf{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^p \right)^{2\theta/p} \mathbf{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^4 \right)^{(1-\theta)/2}.$$

Fin

CORRECTION

CORRECTION

CORRECTION

Inégalité de Hölder

Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $X, Y \in L^0(\Omega)$ que l'on suppose toutes les deux positives.

1 ▷ Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}_+, \quad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Soient $x, y \in \mathbf{R}^+$.

Montrons que $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

Cas 1 : Si $x > 0$ et $y > 0$

$$\begin{aligned} \text{On a } xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} &\Leftrightarrow \ln(xy) \leq \ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \\ &\Leftrightarrow \ln x + \ln y \leq \ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \end{aligned}$$

Ce qui est vrai car :

$$\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \ln(x^p) + \frac{1}{q} \ln(y^q) \quad \text{car} \begin{cases} \ln \text{ concave sur }]0, +\infty[\\ \frac{1}{p} \text{ et } \frac{1}{q} > 0 \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{cases}$$
$$= \ln x + \ln y$$

$$\text{D'où } xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

Cas 2 : Si $x = 0$ ou $y = 0$

L'inégalité $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ est bien vérifiée (il y a égalité).



Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $X, Y \in L^0(\Omega)$ que l'on suppose toutes les deux positives.

1 ▷ Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}_+, \quad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

2 ▷ En déduire l'inégalité suivante (inégalité de Hölder) :

$$\mathbf{E}(XY) \leq (\mathbf{E}(X^p))^{1/p} (\mathbf{E}(Y^q))^{1/q}.$$

On pourra commencer par traiter le cas où $\mathbf{E}(X^p) = \mathbf{E}(Y^q) = 1$.

Si $\mathbf{E}(X^p) = \mathbf{E}(Y^q) = 1$

Il s'agit de montrer que $\mathbf{E}(XY) \leq 1$.

D'après 1^o, on a $XY \leq \frac{X^p}{p} + \frac{Y^q}{q}$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(XY) \leq \mathbf{E}\left(\frac{X^p}{p} + \frac{Y^q}{q}\right)$$

$$= \frac{1}{p} \underbrace{\mathbf{E}(X^p)}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\mathbf{E}(Y^q)}_{=1} \quad \left(\begin{array}{l} \text{linéarité de} \\ \text{l'espérance} \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$= 1$$

D'où

$\mathbf{E}(XY) \leq 1$



Si X et Y sont quelconques

Montrons que : $\mathbf{E}(XY) \leq (\mathbf{E}(X^p))^{1/p} (\mathbf{E}(Y^q))^{1/q}$

Si $\mathbf{E}(X^p) = 0$ ou $\mathbf{E}(Y^q) = 0$

$\Rightarrow (X^p = 0 \text{ presque sûrement}) \text{ ou } (Y^q = 0 \text{ presque sûrement})$

Car $X^p \geq 0$ et $Y^q \geq 0$.

Alors $(X=0 \text{ ou } Y=0)$ (Confusion de nullité et nullité)
presque sûrement

$$\Rightarrow XY = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(XY) = 0$$

$$\text{D'où } \mathbf{E}(XY) \leq (\mathbf{E}(X^p))^{1/p} (\mathbf{E}(Y^q))^{1/q}$$

Si $\mathbf{E}(X^p) \neq 0$ et $\mathbf{E}(Y^q) \neq 0$

On a :

$$\mathbf{E}(XY) \leq (\mathbf{E}(X^p))^{1/p} (\mathbf{E}(Y^q))^{1/q} \Leftrightarrow E\left(\frac{X}{(\mathbf{E}(X^p))^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{Y}{(\mathbf{E}(Y^q))^{\frac{1}{q}}}\right) \leq 1$$

Ce qui est vrai d'après le Cas 1, puisque l'on a :

$$\begin{cases} E\left(\left(\frac{X}{(\mathbf{E}(X^p))^{\frac{1}{p}}}\right)^p\right) = E\left(\frac{X^p}{\mathbf{E}(X^p)}\right) = \frac{1}{\mathbf{E}(X^p)} \times \mathbf{E}(X^p) = 1 \\ \text{et } E\left(\left(\frac{Y}{(\mathbf{E}(Y^q))^{\frac{1}{q}}}\right)^q\right) = 1 \end{cases}$$



Une inégalité de déviation

Soit $(X_i)_{i \in [1, n]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher.

3 ▷ On admet que :

$$\left. \begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \forall x \in \mathbb{R}, e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned} \right\} \leftarrow$$

J'ai ajouté ça pour rendre la question faisable pour les premières années

Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(t) \leq e^{t^2/2}.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

Montrons que $\text{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.

On a :

$$\begin{aligned} \text{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}} &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^n}{n!} \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n \cdot n!} \end{aligned}$$

Pour répondre à la question, il reste à montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{t^{2n}}{2^n \cdot n!}$$

Et puisque $t^{2n} \geq 0$, il suffit de montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(2n)!} \leq \frac{1}{2^n \cdot n!}$$

$$\text{Càd : } \left(\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n \cdot n! \leq (2n)! \right)$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$(2n)! = n! \times \prod_{k=n+1}^{2n} k$$

$$\geq n! \times \prod_{k=n+1}^{2n} 2, \text{ car } (\forall k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket, k \geq 2, \text{ puisque } n+1 \geq 2)$$

$$= n! \times 2^{2n - (n+1) + 1}$$

$$= n! \times 2^n$$

$$\Rightarrow (2n)! \geq n! \times 2^n$$

Cette inégalité est bien vérifiée pour $n=0$ (égalité)

$$\text{Donc } (\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \cdot n! \leq (2n)!)$$



Soit $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher.

3 ▷ On admet que :

$$\left. \begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \forall x \in \mathbb{R}, e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned} \right\} \leftarrow$$

J'ai ajouté ça pour rendre la question faisable pour les premières années

Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(t) \leq e^{t^2/2}.$$

4 ▷ Montrer que : pour tout $t \geq 0$, pour tout $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(t \sum_{i=1}^n c_i X_i \right) \right) \leq \exp \left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2 \right).$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\exp \left(t \sum_{i=1}^n c_i X_i \right) \right) &= \mathbb{E} \left(\exp \left(\sum_{i=1}^n t c_i X_i \right) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^n e^{t c_i X_i} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E} \left(e^{t c_i X_i} \right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{Car les } e^{t c_i X_i} \text{ sont} \\ \text{indépendantes, vu que} \\ \text{les } X_i \text{ le sont} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\mathbb{E} \left(e^{t c_i X_i} \right) = ? \quad , \text{ on a } \begin{cases} X_i(\Omega) = \{-1, 1\} \\ P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(e^{t c_i X_i} \right) &= \underbrace{P(X_i = 1)}_{= \frac{1}{2}} \cdot e^{t c_i \times 1} + \underbrace{P(X_i = -1)}_{= \frac{1}{2}} \cdot e^{t c_i \times (-1)} \\ &= \frac{e^{t c_i} + e^{-t c_i}}{2} \end{aligned}$$

Formule de transfert

$$= \text{Ch}(tc_i)$$

Donc $E\left(\exp\left(t \sum_{i=1}^n c_i X_i\right)\right) = \prod_{i=1}^n \text{Ch}(tc_i)$

$$\leq \prod_{i=1}^n e^{\frac{(tc_i)^2}{2}} \quad (\text{d'après 3°})$$

$$= \prod_{i=1}^n e^{\frac{t^2 c_i^2}{2}}$$

$$= \exp\left(\sum_{i=1}^n \frac{t^2 c_i^2}{2}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2\right)$$



$E\left(\exp\left(t \sum_{i=1}^n c_i X_i\right)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2\right)$?

Soit $(X_i)_{i \in [1, n]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher.

3 ▷ On admet que :

$$\left. \begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned} \right\} \leftarrow$$

J'ai ajouté ça pour rendre la question faisable pour les premières années

Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(t) \leq e^{t^2/2}.$$

4 ▷ Montrer que : pour tout $t \geq 0$, pour tout $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(t \sum_{i=1}^n c_i X_i \right) \right) \leq \exp \left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2 \right).$$

5 ▷ En déduire que : pour tout $t \geq 0$, pour tout $x \geq 0$ et pour tout $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{P} \left(\exp \left(x \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| \right) > e^{tx} \right) \leq 2 e^{-tx} \exp \left(\frac{x^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2} \right).$$

On pourra utiliser l'inégalité de Markov.

Rappel : L'inégalité de Markov

$$\text{Si } Y \geq 0 \text{ et } a > 0, \text{ on a } P(Y \geq a) \leq \frac{1}{a} E(Y)$$

Soient $t \geq 0, x \geq 0, (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{M. que : } \mathbb{P} \left(\exp \left(x \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| \right) > e^{tx} \right) \leq 2 e^{-tx} \exp \left(\frac{x^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2} \right)$$

On a ;

$$\left(\exp \left(x \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| \right) > e^{tx} \right) = \left(\exp \left(x \cdot \sum_{i=1}^n c_i X_i \right) > e^{tx} \right) \cup \left(\exp \left(-x \sum_{i=1}^n c_i X_i \right) > e^{tx} \right)$$

$$|S| > n \Leftrightarrow$$

$$(S > n \text{ ou } -S > n)$$

2) on :

$$P\left(\exp\left(\lambda \left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|\right) > e^{+\lambda}\right) = P\left(\exp\left(\lambda \cdot \sum_{i=1}^n c_i X_i\right) > e^{+\lambda}\right) + P\left(\exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^n c_i X_i\right) > e^{+\lambda}\right)$$

et d'après l'inégalité de Markov, on a :

$$\begin{cases} P\left(\exp\left(\lambda \cdot \sum_{i=1}^n c_i X_i\right) > e^{+\lambda}\right) \leq \frac{1}{e^{+\lambda}} E\left(\exp\left(\lambda \cdot \sum_{i=1}^n c_i X_i\right)\right) \\ P\left(\exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^n c_i X_i\right) > e^{+\lambda}\right) \leq \frac{1}{e^{+\lambda}} E\left(\exp\left(-\lambda \cdot \sum_{i=1}^n c_i X_i\right)\right) \end{cases}$$

Alors :

$$P\left(\exp\left(\lambda \left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|\right) > e^{+\lambda}\right) \leq e^{-\lambda} \left(E\left(\exp\left(\lambda \cdot \sum_{i=1}^n c_i X_i\right)\right) + E\left(\exp\left(-\lambda \cdot \sum_{i=1}^n c_i X_i\right)\right) \right)$$

$$\leq e^{-\lambda} \left(\exp\left(\frac{\lambda^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2\right) + \exp\left(\frac{(-\lambda)^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2\right) \right)$$

↓ d'après 4°)

$$= 2e^{-\lambda} \exp\left(\frac{\lambda^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2}\right)$$

$P\left(\exp\left(\lambda \left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|\right) > e^{+\lambda}\right) \leq 2e^{-\lambda} \exp\left(\frac{\lambda^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2}\right)$?

Enfin :

$$P\left(\exp\left(\lambda \left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|\right) > e^{+\lambda}\right) \leq 2e^{-\lambda} \exp\left(\frac{\lambda^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2}\right)$$

□

4 ▷ Montrer que : pour tout $t \geq 0$, pour tout $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\mathbf{E} \left(\exp \left(t \sum_{i=1}^n c_i X_i \right) \right) \leq \exp \left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2 \right).$$

5 ▷ En déduire que : pour tout $t \geq 0$, pour tout $x \geq 0$ et pour tout $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\mathbf{P} \left(\exp \left(x \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| \right) > e^{tx} \right) \leq 2 e^{-tx} \exp \left(\frac{x^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2} \right).$$

On pourra utiliser l'inégalité de Markov.

6 ▷ Montrer que : pour tout $t \geq 0$ et pour tout $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ non nul,

$$\mathbf{P} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| > t \right) \leq 2 \exp \left(- \frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2} \right).$$

Soit $t \geq 0$ et $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$.

Montrons que $P \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| > t \right) \leq 2 \exp \left(- \frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2} \right)$

Soit $\lambda > 0$. On a :

$$\begin{aligned} P \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| > t \right) &= P \left(\lambda \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| > \lambda t \right) \\ &= P \left(\exp \left(\lambda \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| \right) > \exp(\lambda t) \right) \\ &\leq 2 e^{-\lambda t} \exp \left(\frac{\lambda^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2} \right) \end{aligned}$$

d'après 5)

D'où :

$$\forall \lambda > 0, P \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| > t \right) \leq 2 e^{-\lambda t} \exp \left(\frac{\lambda^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2} \right)$$

On veut montrer :

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i x_i\right| > t\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2}\right)$$

Il suffit de montrer l'existence d'un $\lambda > 0$ tel que :

$$2e^{-t\lambda} \exp\left(\frac{\lambda^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2}\right) = 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2}\right)$$

Et on a :

$$2e^{-t\lambda} \exp\left(\frac{\lambda^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2}\right) = 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -t\lambda + \lambda^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n c_i^2}{2} = -\frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n c_i^2}{2} \lambda^2 - t\lambda + \frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n c_i^2\right) \lambda^2 - 2\left(\sum_{i=1}^n c_i^2\right) t\lambda + t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i^2\right) \lambda - t\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{t}{\sum_{i=1}^n c_i^2}$$

On a vu $t > 0$.

Si $t > 0$:

$$\lambda = \frac{t}{\sum_{i=1}^n c_i^2} > 0 \quad \underline{\text{Convient}}$$

Si $t = 0$:

L'inégalité voulue $P\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right| > t\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2}\right)$ est équivalente

$$\text{à : } P\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right| > 0\right) \leq 2$$

Ce qui est vrai.



Inégalités de Khintchine

Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher. Soit $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$.

7 ▷ Soit X une variable aléatoire réelle positive et finie. Soit F_X la fonction définie pour tout $t \geq 0$, par

$$F_X(t) = \mathbf{P}(X > t).$$

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t) dt$ converge, puis que

$$\mathbf{E}(X^p) = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t) dt.$$

7) i)

Montrons que $\int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t) dt$ converge.

$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, où $0 \leq x_1 < \dots < x_n$ et $n \in \mathbf{N}^*$.

$F_X(t) = P(X > t)$, pour tout $t \geq 0$.



Si $0 \leq t < x_1$, $F_X(t) = P(X > t) = P(\Omega) = 1$
 $\hookrightarrow = \Omega$

Si $x_1 < t < x_2$, $F_X(t) = P(X > t) = P(X > x_1)$
 $\hookrightarrow = (X > x_1)$
 $\vdots$

Si $x_{n-1} < t < x_n$, $F_X(t) = P(X > t) = P(X > x_{n-1})$
 $\hookrightarrow = (X > x_{n-1})$

Si $x_n < t$, $F_x(t) = P(\underbrace{X > t}_{\rightarrow \phi}) = P(\phi) = 0$

Notons $f(t) = t^{p-1} F_x(t)$. On a :

$$f(t) = \begin{cases} t^{p-1} & \text{si } t \in [0, x_1[\\ P(X > x_1) t^{p-1} & \text{si } t \in]x_1, x_2[\\ \vdots & \\ P(X > x_{n-1}) t^{p-1} & \text{si } t \in]x_{n-1}, x_n[\\ 0 & \text{si } t > x_n \end{cases}$$

Ainsi : $\begin{cases} f \text{ est continue par morceaux sur } [0, +\infty[\\ \forall t > x_n, f(t) = 0 \end{cases}$

D'où $\left(\forall y > x_n, \int_0^y f(t) dt = \int_0^{x_n} f(t) dt \right)$

$\Rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\int_0^y f(t) dt \right) = \int_0^{x_n} f(t) dt$

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge et l'on a :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{x_n} f(t) dt$$



Inégalités de Khintchine

Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher. Soit $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$.

7 ▷ Soit X une variable aléatoire réelle positive et finie. Soit F_X la fonction définie pour tout $t \geq 0$, par

$$F_X(t) = \mathbf{P}(X > t).$$

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t) dt$ converge, puis que

$$\mathbf{E}(X^p) = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t) dt.$$

7) ii) Montrons que $\mathbf{E}(X^p) = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t) dt$

On a $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$

$$\mathbf{E}(X^p) = \sum_{k=1}^n x_k^p P(X=x_k) \quad (\text{d'après la formule du transfert})$$

Mais il s'agit de montrer que :

$$p \int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t) dt = \sum_{k=1}^n x_k^p P(X=x_k)$$

On a :

$$p \int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t) dt = p \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

$$= p \int_0^{x_n} f(t) dt$$

$$= \int_0^{x_1} f(t) dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t) dt$$

On a :

$$f(t) = \begin{cases} t^{p-1} & \text{si } t \in [0, x_1[\\ P(X > x_1) t^{p-1} & \text{si } t \in]x_1, x_2[\\ \vdots & \\ P(X > x_{n-1}) t^{p-1} & \text{si } t \in]x_{n-1}, x_n[\\ 0 & \text{si } t > x_n \end{cases}$$

Alors :

$$P \int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t) dt = \int_0^{x_1} P t^{p-1} dt + \int_{x_1}^{x_2} P P(X > x_1) t^{p-1} dt + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} P P(X > x_{n-1}) t^{p-1} dt$$

$$= [t^p]_0^{x_1} + P(X > x_1) [t^p]_{x_1}^{x_2} + \dots + P(X > x_{n-1}) [t^p]_{x_{n-1}}^{x_n}$$

$$= x_1^p + P(X > x_1) (x_2^p - x_1^p) + \dots + P(X > x_{n-1}) (x_n^p - x_{n-1}^p)$$

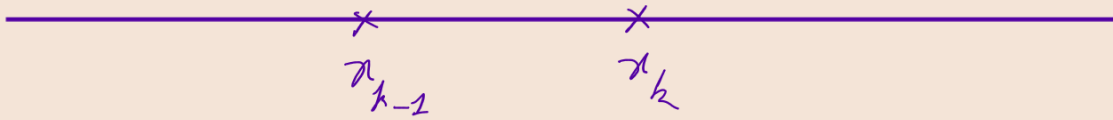
$$= x_1^p + \sum_{k=1}^{n-1} P(X > x_k) (x_{k+1}^p - x_k^p)$$

$$= x_1^p + \sum_{k=1}^{n-1} P(X > x_k) x_{k+1}^p - \sum_{k=1}^{n-1} P(X > x_k) x_k^p$$

$$= x_1^p + \sum_{k=2}^n P(X > x_{k-1}) x_k^p - \sum_{k=1}^{n-1} P(X > x_k) x_k^p$$

$$= x_1^p + \sum_{k=2}^{n-1} (P(X > x_{k-1}) - P(X > x_k)) x_k^p + P(X > x_{n-1}) x_n^p - P(X > x_1) x_1^p$$

$$P \int_0^{+\infty} t^{p-1} F_x(t) dt = (1 - P(X > x_1)) x_1^p + \sum_{k=2}^{n-1} (P(X > x_{k-1}) - P(X > x_k)) x_k^p + P(X > x_{n-1}) x_n^p$$



$$\text{Ans: } P(X > x_{k-1}) = P(X = x_k) + P(X > x_k)$$

$$\Rightarrow P(X > x_{k-1}) - P(X > x_k) = P(X = x_k)$$



$$1 - P(X > x_1) = P(X \leq x_1) = P(X = x_1)$$

$$P(X > x_{n-1}) = P(X = x_n)$$

Dir: :

$$P \int_0^{+\infty} t^{p-1} F_x(t) dt = P(X = x_1) x_1^p + \sum_{k=2}^{n-1} P(X = x_k) x_k^p + P(X = x_n) x_n^p$$

$$\Rightarrow P \int_0^{+\infty} t^{p-1} F_x(t) dt = \sum_{k=1}^n x_k^p P(X = x_k)$$



8 ▷ On suppose dans cette question que $\sum_{i=1}^n c_i^2 = 1$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t^2/2} dt$ converge, puis que

$$\mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^4 \right) \leq 8 \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t^2/2} dt.$$

8) i) Montrons que $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

La fonction $t \mapsto t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

On a $t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissance comparée.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (Riemann : $\alpha = 2 > 1$)

D'où $\int_1^{+\infty} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge.

Par suite $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge.



8 ▷ On suppose dans cette question que $\sum_{i=1}^n c_i^2 = 1$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t^2/2} dt$ converge, puis que

$$\mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^4 \right) \leq 8 \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t^2/2} dt.$$

8) ii) Montrons que $E \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^4 \right) \leq 8 \int_0^{+\infty} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Notons ici $X = \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|$. On a :

$$\begin{aligned} E \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^4 \right) &= E(X^4) \\ &= 4 \int_0^{+\infty} t^3 F_X(t) dt \quad \left(\begin{array}{l} \text{d'après 7°)} \\ \text{car } X \geq 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned} F_X(t) &= P(X > t) \\ &= P \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| > t \right) \end{aligned}$$

$$\leq 2 \exp \left(-\frac{t^2}{2 \cdot \sum_{i=1}^n c_i^2} \right) \quad \left(\text{d'après 6°)} \right)$$

$$\Rightarrow \forall t \geq 0, F_X(t) \leq 2 e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \left(\text{car } \sum_{i=1}^n c_i^2 = 1 \right)$$

7 ▷ Soit X une variable aléatoire réelle positive et finie. Soit F_X la fonction définie pour tout $t \geq 0$, par $F_X(t) = P(X > t)$.
Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t) dt$ converge, puis que $E(X^p) = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t) dt$.

pour tout $t \geq 0$ et pour tout $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ non nul,

$$P \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| > t \right) \leq 2 \exp \left(-\frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2} \right).$$

Donc :

$$E\left(\left(\sum_{i=1}^n C_i X_i\right)^4\right) \leq 8 \int_0^{+\infty} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



9 ▷ Montrer que

$$\mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right) = \sum_{i=1}^n c_i^2.$$

$$\mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right) = \mathbf{E} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} c_i c_j X_i X_j \right)$$

$$= \sum_{1 \leq i, j \leq n} c_i c_j \mathbf{E}(X_i X_j) \quad (\text{Linéarité de l'espérance})$$

$$= \sum_{i \neq j} c_i c_j \mathbf{E}(X_i X_j) + \sum_{i=1}^n c_i^2 \mathbf{E}(X_i^2).$$

$\forall i \neq j, \mathbf{E}(X_i X_j) = \mathbf{E}(X_i) \mathbf{E}(X_j)$ car $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes.

$$= 0$$

$$\text{Car } \mathbf{E}(X_i) = 1 \cdot \underbrace{P(X_i=1)}_{1/2} + (-1) \cdot \underbrace{P(X_i=-1)}_{1/2} = 0$$

$$\forall i, \mathbf{E}(X_i^2) = 1^2 \underbrace{P(X_i=1)}_{1/2} + (-1)^2 \underbrace{P(X_i=-1)}_{1/2} \quad (\text{Formule de transfert})$$

$$= 1$$

Donc

$$\mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right) = \sum_{i=1}^n c_i^2$$



Dans les questions numérotées de 10 ▷ à 11 ▷, on suppose $1 \leq p < 2$.

10 ▷ Justifier qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{2} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4}$.

Soit $1 \leq p < 2$.

Montrons que: $\exists \theta \in]0, 1[, \frac{1}{2} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4}$

On a :

$$\exists \theta \in]0, 1[, \frac{1}{2} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4} \Leftrightarrow \exists \theta \in]0, 1[, \frac{1}{2} = \frac{4\theta + p(1-\theta)}{4p}$$

$$\Leftrightarrow \exists \theta \in]0, 1[, 4p = 8\theta + 2p(1-\theta)$$

$$\Leftrightarrow \exists \theta \in]0, 1[, 4p = 8\theta + 2p - 2p\theta$$

$$\Leftrightarrow \exists \theta \in]0, 1[, 2p = \theta(8 - 2p)$$

$$\Leftrightarrow \exists \theta \in]0, 1[, \theta = \frac{2p}{8 - 2p}$$

$$\Leftrightarrow \exists \theta \in]0, 1[, \theta = \frac{p}{4 - p}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{4-p} \in]0, 1[$$

$$\Leftrightarrow \left(\underbrace{\frac{p}{4-p} > 0}_{\text{car } 1 \leq p < 2} \text{ et } \frac{p}{4-p} < 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{4-p} < 1$$

$$\Leftrightarrow p < 4-p \quad \left(\text{car } 4-p > 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow 2p < 4$$

$$\Leftrightarrow p < 2$$

Ce qui est vrai, car $0 \leq p < 2$

Donc

$$\exists \theta \in]0,1[, \frac{1}{2} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4}$$



Dans les questions numérotées de 10 ▷ à 11 ▷, on suppose $1 \leq p < 2$.

10 ▷ Justifier qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{2} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4}$.

11 ▷ Montrer que

$$\mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right) \leq \mathbf{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^p \right)^{2\theta/p} \mathbf{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^4 \right)^{(1-\theta)/2}$$

Montrons que :

$$\mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right) \leq \mathbf{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^p \right)^{\frac{2\theta}{p}} \mathbf{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^4 \right)^{\frac{1-\theta}{2}}$$

Cela doit être l'inégalité de Hölder (question 2°).

$$\text{On a : } \frac{1}{2} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{2\theta}{p} + \frac{1-\theta}{2}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{\left(\frac{p}{2\theta}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{2}{1-\theta}\right)}$$

Alors d'après l'inégalité de Hölder, 2°), on a :

$$\left\{ \begin{aligned} E(XY) &\leq \left(E\left(X^{\frac{p}{2\theta}}\right) \right)^{\frac{2\theta}{p}} \cdot \left(E\left(Y^{\frac{2}{1-\theta}}\right) \right)^{\frac{1-\theta}{2}} \end{aligned} \right.$$

Si X et Y var aléat positives.

On veut montrer que :

$$E\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^2\right) \leq E\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^p\right)^{\frac{2\theta}{p}} E\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^4\right)^{\frac{1-\theta}{2}}$$

On a :

$$\left\{ \begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^p &= \left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^{2\theta}\right)^{\frac{p}{2\theta}} \\ \left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^4 &= \left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^{2/(1-\theta)}\right)^{\frac{2}{1-\theta}} \end{aligned} \right.$$

Alors il s'agit de montrer que :

$$E\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^2\right) \leq E\left(\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^{2\theta}\right)^{\frac{p}{2\theta}}\right)^{\frac{2\theta}{p}} \cdot E\left(\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^{2/(1-\theta)}\right)^{\frac{2}{1-\theta}}\right)^{\frac{1-\theta}{2}}$$

Ce qui est vrai, d'après l'inégalité de Hölder, car :

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^{2\theta} \times \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^{2(1-\theta)} = \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^2 = \left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2$$



FIN