

# CONCOURS COMMUN 2003

## DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

---

**Épreuve spécifique de Mathématiques**  
(filière MPSI)

**Judi 22 mai 2003 de 8h00 à 12h00**

# EXTRAIT

## **Premier problème**

$\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels et  $\mathbb{R}$  le corps des nombres réels.

Dans tout le problème  $\alpha$  désigne un réel strictement supérieur à 1.

On pose :  $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^\alpha} dx$ .

L'objectif du problème est le calcul de l'intégrale  $I(\alpha)$ .

On rappelle que pour  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$  on a les formules :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)).$$

$$\sin(a) - \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

## I. Quelques résultats préliminaires

Pour  $x$  dans  $\mathbb{R}$  et pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  on pose :  $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos(kx)$ .

Pour  $x \in ]0, \pi]$  et pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$  on pose :  $g_n(x) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ .

1) Etablir la formule :  $\forall x \in ]0, \pi], f_n(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}g_n(x)$ .

On pourra, pour ce faire, s'intéresser à la quantité  $\sin\left(\frac{x}{2}\right)f_n(x)$ .

2) a) En déduire que  $g_n$  est prolongeable en une application continue sur  $[0, \pi]$ .

On note encore  $g_n$  l'application ainsi prolongée.

b) Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$  on pose :  $u_n = \int_0^\pi g_n(x) dx$ .

Montrer que la suite  $(u_n)$  est constante et préciser sa valeur.

3) Soit  $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :  $\forall x \in ]0, \pi], g(x) = \frac{\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) - 1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$  et  $g(0) = 0$ .

a) Prouver que  $g$  est continue en 0.

b) Etablir l'existence et déterminer la valeur de  $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} g'(x)$ .

c) Etablir que  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, \pi]$  et préciser  $g'(0)$ .

## II. Etude d'une suite

Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  on pose :  $X_n = \int_0^\pi f_n(x) \cos\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx$ .

4) Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$  on pose  $v_n = \int_0^\pi g(x) \sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right) dx$ .

Montrer qu'il existe  $A$  dans  $\mathbb{R}$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, |v_n| \leq \frac{A}{2n+1}$ .

On pourra, pour ce faire, effectuer une intégration par parties.

5) Etablir que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = -\frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}v_n + \frac{\pi}{2}$ .

Montrer que la suite  $(X_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

6) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = \frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) \sum_{k=1}^n (-1)^k \left[ \frac{1}{1+\alpha k} + \frac{1}{1-\alpha k} \right]$ .

## III. Détermination de la valeur de $I(\alpha)$

On adopte la notation  $\beta = \frac{1}{\alpha}$  et pour  $t \in ]0, 1]$  on pose :  $\varphi(t) = \frac{t^{\beta-1}}{1+t}$  et  $\psi(t) = \frac{t^{-\beta}}{1+t}$ .

7) a) Justifier l'existence de  $I(\alpha)$ .

b) Montrer que les applications  $\varphi$  et  $\psi$  sont intégrables sur  $]0, 1]$ .

Dans toute la suite on pose :  $J(\beta) = \int_0^1 \varphi(t) dt$  et  $K(\beta) = \int_0^1 \psi(t) dt$ .

8) a) Montrer que :  $\forall a \in ]0,1[$ ,  $\int_a^1 \frac{1}{1+x^\alpha} dx = \beta \int_{a^\alpha}^1 \varphi(t) dt$ . On pourra poser  $t = x^\alpha$ .

En déduire la formule :  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^\alpha} dx = \beta J(\beta)$ .

b) Montrer que :  $\forall A \in ]1, +\infty[$ ,  $\int_1^A \frac{1}{1+x^\alpha} dx = \beta \int_{A^{-\alpha}}^1 \psi(t) dt$ .

En déduire la formule :  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^\alpha} dx = \beta K(\beta)$ .

9) Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$  et  $t$  dans  $\mathbb{R}$  on pose :  $\sigma_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k$ .

Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  et  $t$  dans  $]0,1]$  on pose :  $\varphi_n(t) = \sigma_n(t) t^{\beta-1}$  et  $\psi_n(t) = \sigma_{n-1}(t) t^{-\beta}$ .

a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall t \in [0,1]$ ,  $\left| \sigma_n(t) - \frac{1}{1+t} \right| \leq t^{n+1}$ .

b) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall t \in ]0,1]$ ,  $|\varphi_n(t)| \leq 2\varphi(t)$  et  $|\psi_n(t)| \leq 2\psi(t)$ .

c) Montrer que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$   $\varphi_n$  et  $\psi_n$  sont intégrables sur  $]0,1]$ .

10) Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  on pose :  $J_n(\beta) = \int_0^1 \varphi_n(t) dt$  et  $K_n(\beta) = \int_0^1 \psi_n(t) dt$ .

a) Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n(\beta) = J(\beta)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n(\beta) = K(\beta)$ .

b) Exprimer  $J_n(\beta) + K_n(\beta)$  à l'aide de  $X_n$  et de  $\alpha$ .

c) Montrer que :  $I(\alpha) = \frac{\pi}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}$ .

# FIN

