

Épreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

Vendredi 12 mai 2006 de 08h00 à 12h00

EXTRAIT

Problème 1 : Analyse

Dans tout le problème, on adopte la notation $\ell n^k(x)$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$) comme écriture simplifiée du nombre réel $(\ell n(x))^k$ et par convention, on pose : $\ell n^0(x) = 1$ (y compris si $x = 1$).

Partie 2 : calcul de primitives

Soient α un nombre réel distinct de -1 et x un nombre réel quelconque strictement positif.

Pour tout nombre entier naturel n , on considère le nombre réel : $Z_n(x) = \frac{1}{n!} \int_1^x t^\alpha \ell n^n(t) dt$.

7) Calculer $Z_0(x)$ et $Z_1(x)$.

8) Déterminer une relation entre $Z_{n+1}(x)$ et $Z_n(x)$.

9) Montrer :

$$Z_n(x) = \left(\frac{-1}{\alpha + 1} \right)^{n+1} - \left[\sum_{k=0}^n \left(\frac{-1}{\alpha + 1} \right)^{n+1-k} \frac{\ell n^k(x)}{k!} \right] x^{\alpha+1}$$

10) On note $\mathcal{N}_\alpha^n$ l'ensemble des fonctions définies sur $]0, +\infty[$ à valeurs réelles, du type suivant

$$x \mapsto p(\ell n(x)) \cdot x^\alpha$$

où p est une fonction polynomiale quelconque (à coefficients réels) de degré au plus n .

Montrer que toute fonction élément de $\mathcal{N}_\alpha^n$ admet au moins une primitive élément de $\mathcal{N}_{\alpha+1}^n$.

Partie 3 : résolution d'équations différentielles

Dans toute cette partie, les équations différentielles considérées seront, sauf mention contraire, résolues sur $]0, +\infty[$: ceci signifie que l'on ne s'intéresse qu'aux fonctions solutions définies sur $]0, +\infty[$ et à valeurs réelles.

Soit α un nombre réel donné.

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : x.y' - \alpha y = 0 \quad ; \quad (E_2) : x^2.y'' + (1 - 2\alpha)x.y' + \alpha^2 y = 0$$

où y est l'application inconnue de la variable réelle $x > 0$ et à valeurs réelles.

11) Déterminer toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ à valeurs réelles solutions de (E_1) .

12)a) Soit $h :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application quelconque de classe $\mathcal{C}^2$.

On définit alors une nouvelle application :

$$\begin{aligned} k : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto k(u) = h(e^u) \end{aligned}$$

Justifier que k est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Pour $u \in \mathbb{R}$, exprimer $k'(u)$ et $k''(u)$ à l'aide des dérivées première et seconde de h .

12)b) Montrer que h est solution de (E_2) (c'est-à-dire : $\forall x > 0, x^2 \cdot h''(x) + (1 - 2\alpha)x \cdot h'(x) + \alpha^2 h(x) = 0$) si et seulement si on a :

$$\forall u \in \mathbb{R}, k''(u) - 2\alpha k'(u) + \alpha^2 k(u) = 0$$

12)c) Déterminer l'expression de $k(u)$ pour $u \in \mathbb{R}$ lorsque h est solution de (E_2) .

12)d) En déduire que l'ensemble des solutions de (E_2) est l'ensemble $\mathcal{N}_\alpha^1$ (cf. partie 2)

13)a) On considère l'application :

$$\begin{aligned} P : \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R}) \\ y &\longmapsto x \cdot y' - \alpha y \end{aligned}$$

On pose : $P^1 = P$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P^{n+1} = P^n \circ P$.

Pour $y \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R})$, calculer $(P \circ P)(y)$. En déduire : $P^2(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \mathcal{N}_\alpha^1$.

13)b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P^n(y) = 0$ est une équation différentielle d'ordre n du type

$$x^n \cdot y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \cdot y^{(k)} = 0$$

(avec $a_0, \dots, a_{n-1}$ des nombres réels que l'on ne cherchera pas à déterminer)

13)c) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $P^n(y) = 0$ est $\mathcal{N}_\alpha^{n-1}$.

FIN

