Extrait du CNC - 2016 - (MP)

1. Soit S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et x, $x \in [0,1]$, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \dfrac{S_n}{n}$.

(a) Déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$ respectivement l'espérance et la variance de X_n.

(b) Justifier que, pour tout $\delta > 0$, $P(|X_n - x| \geq \delta) \leq \dfrac{1}{4n\delta^2}$.

Solution :

1) a)
$$E(X_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} E(S_n) = \frac{1}{n} \cdot n x \quad (\text{car } S_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,x)) = x$$

$$V(X_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(S_n) = \frac{1}{n^2} n x(1-x) \quad (S_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,x)) = \frac{x(1-x)}{n}$$

b) Soit $\delta > 0$.

$$P(|X_n - x| \geq \delta) = P(|X_n - E(X_n)| \geq \delta) \leq \frac{V(X_n)}{\delta^2} \quad (\text{L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev}) = \frac{x(1-x)}{n\delta^2}$$

Pour terminer, il suffit de vérifier que

On a :
$$\frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2} \iff x(1-x) \leq \frac{1}{4} \iff 4x^2 - 4x + 1 \geq 0 \iff (2x-1)^2 \geq 0$$

ce qui est vrai $\square$

2) (a) Vérifier que $x \mapsto C_n(f)(x)$ est une fonction polynomiale définie sur $[0,1]$.

Soit $x \in [0,1]$. On a :

$$C_n(f)(x) = E(f(X_n))$$

On a $S_n(\Omega) = \{0, \dots, n\} \Rightarrow X_n(\Omega) = \{\frac{k}{n} / 0 \leq k \leq n\}$

Ainsi, d'après la formule du transfert on a :

$$C_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P\left(X_n = \frac{k}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P(S_n = k)$$

$$C_n(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad \left(\text{car } S_n \hookrightarrow B(n,x)\right)$$

c'est une fonction polynomiale définie sur $[0,1]$.

2) i. Montrer que $\left| \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \leq \beta} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Soit $x \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\left| \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \leq \beta} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \right| \leq \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \leq \beta} \overbrace{\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|}^{\leq \frac{\varepsilon}{2}} P\left(X_n = \frac{k}{n}\right)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \leq \beta} P\left(X_n = \frac{k}{n}\right)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} P\left(X_n = \frac{k}{n}\right)}_{=1 \,;\; X_n(\Omega) = \{\frac{k}{n} / 0 \leq k \leq n\}}$$

$$\boxed{\leq \frac{\varepsilon}{2}}$$

2) ii. Montrer que $\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\beta} \left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(X_n=\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2n\beta^2}$, avec $M=\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$.

Soit $x \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\beta} \left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(X_n=\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\beta} \overbrace{\left(\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|+|f(x)|\right)}^{\leqslant 2M} P\left(X_n=\frac{k}{n}\right)$$

$$\leqslant 2M \underbrace{\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\beta} P\left(X_n=\frac{k}{n}\right)}_{=P\left(|X_n-x|>\beta\right)}$$

$$= 2MP\left(|X_n-x|>\beta\right)$$

$$\overset{1°/b/}{\leqslant} 2M\cdot\frac{1}{4n\beta^2}$$

$$= \frac{M}{2n\beta^2}$$

(c) En déduire que la suite $(C_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Il s'agit de montrer que :

$$\left(\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geqslant N, \forall x\in[0,1], |C_n(f)(x)-f(x)|\leqslant \varepsilon\right)$$

Soit $\varepsilon>0$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0,1]$, on a :

$$|C_n(f)(x)-f(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P\left(X_n=\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n} f(x)\, P\left(X_n=\frac{k}{n}\right)\right|$$

Car $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P\left(X_n=\frac{k}{n}\right)=1$

Soit $\beta>0$ tel que :

$$\left(\forall x_1,x_2\in[0,1], |x_1-x_2|\leqslant\beta \Longrightarrow |f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$|C_n(f)(x)-f(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(X_n=\frac{k}{n}\right)\right|$$

$$\leqslant \underbrace{\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\beta}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(X_n=\frac{k}{n}\right)\right|}_{\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\text{ ; d'après 2)b)i)}} + \underbrace{\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\beta}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(X_n=\frac{k}{n}\right)\right|}_{\leqslant\frac{M}{2n\beta^2}\text{ ; d'après 2/b/ii)}}$$

Ainsi :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[0,1], |C_n(f)(x)-f(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2n\beta^2}\right) \quad \Omega$$

Or $\displaystyle\lim_{n}\frac{M}{2n\beta^2}=0$, alors $\left(\exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geqslant N, \frac{M}{2n\beta^2}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\right)$

D'où : $\forall n\geqslant N, \forall x\in[0,1]$, et en vertu de Ω, on a :

$|C_n(f)(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$.

Enfin :

$$\left(\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geqslant N, \forall x\in[0,1], |C_n(f)(x)-f(x)|\leqslant \varepsilon\right)$$

Fin