Récurrence - Sommes doubles

Récurrence simple (ou faible)

Exercice 1 :

Montrer que par récurrence que :

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \succ n$.
2) $\forall n \in \mathbb{N},\ (1+a)^n \succeq 1+na$; où $a \succ 0$.
3) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
4) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
5) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
6) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1\times 2 + 2\times 3 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
7) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$
8) $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \preceq \frac{a^n+b^n}{2}$; où $a \succ 0$ et $b \succ 0$.
9) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \preceq (n+1)!$
10) $\forall n \succeq 4,\ n^2 \preceq 2^n$
11) $\forall n \in \mathbb{N},\ (3^{2n} - 2^n)$ est divisible par 7.
12) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{4}{5}\right)^k$.

Montrer que

$$S_n = \frac{4\times 5^{n+1} - (5+n)4^{n+1}}{5^n}$$

Exercice 3 :

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \succeq n$$

Rappel : f est strictement croissante ça veut dire que :

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ n \prec m \Rightarrow f(n) \prec f(m)$$

Exercice 4 :

1) Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{xy} \preceq \frac{x+y}{2}$

2) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x_1, ..., x_{2^n} \in \mathbb{R}^+,\ \left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k\right)^{\frac{1}{2^n}} \preceq \frac{\sum_{k=1}^{2^n} x_k}{2^n}$$

Exercice 5 :

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n+1}{2}} \end{cases}$

Montrer que : $\forall n \succeq 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \preceq u_n \prec 1$

Récurrence double :

Exercice 6 : (*Suite de Fibonacci*)

Considérons la suite $(u_n)_{n\succeq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \preceq \left(\frac{5}{3}\right)^n$

Récurrence forte :

Exercice 7 :

Considérons la suite $(u_n)_{n\succeq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \succeq 2,\ u_n = u_{n-1} + ... + u_0 \end{cases}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2^{n-1}$

Exercice 8 :

Notons pour tout $n \succeq 2$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Montrer que

$$\forall n \succeq 2,\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \textit{ tel que } u_n = \frac{2a_n + 1}{2b_n}$$

2) En déduire que pour tout $n \succeq 2$, $u_n \notin \mathbb{N}$

Sommes doubles :

Exercice 9 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i,j \preceq n} ij$ 2) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i \prec j \preceq n} ij$

3) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i,j \preceq n} (i+j)$ 4) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i \prec j \preceq n} (i+j)$

5) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i,j \preceq n} (i+j)^2$ 6) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i \prec j \preceq n} (i+j)^2$

7) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i,j \preceq n} min(i,j)$ 8) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i,j \preceq n} max(i,j)$

9) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i \preceq j \preceq n} C_n^j C_i^j$ 10) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i \preceq j \preceq n} \frac{i}{j}$