

EPREUVE DES PETITES MINES, MPSI, 1999

EXTRAIT

Problème 1

Partie I

soit l un réel. On note f l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0 \\ l & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{I}_n$ l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$.

1. Quelle valeur faut-il donner à l pour que f soit continue à droite en 0 ?

On suppose désormais que l a cette valeur.

2. Montrez que f est de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est-à-dire : dérivable, et à dérivée continue) sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et explicitez la dérivée de f à droite en 0.
3. Soit $n \geq 1$. Montrez que, dans l'intervalle $\mathcal{I}_n$, l'équation $x \cos x = \sin x$ possède une et une seule solution, que l'on notera x_n .
4. Déterminez un équivalent *très simple* de x_n , lorsque n tend vers l'infini.
5. Décrivez rapidement les variations de f dans l'intervalle $\mathcal{I}_0$, puis dans les intervalles $\mathcal{I}_{2n-1}$ et $\mathcal{I}_{2n}$ pour $n \geq 1$.
6. Déterminez l'allure de la courbe représentative de f .

Partie II

1. Justifiez l'existence de l'application F définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$u_n = F((n+1)\pi) - F(n\pi) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) dt$$

2. Quel est le signe de u_n ?

3. Montrez que la suite de terme général $|u_n|$ est décroissante et converge vers 0.
4. Que pouvez-vous dire des suites de termes généraux respectifs $F(2\pi n)$ et $F((2n+1)\pi)$?
5. Montrez que la suite de terme général $F(n\pi)$ converge vers une limite μ (que l'on ne cherchera pas à déterminer).
6. Justifier l'encadrement $0 \leq \mu \leq \pi$.
7. Préciser la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, si toutefois cette limite existe.

On peut établir la formule $\mu = \frac{\pi}{2}$ mais c'est une autre histoire

Partie III

Il est clair que la restriction g de f à l'intervalle $]0, +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle ; on pourrait d'ailleurs prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$ mais ce n'est pas notre objectif. On se propose simplement d'établir quelques résultats concernant la dérivée n -ième de g , notée $g^{(n)}$. En particulier, $g^{(0)}$ désigne g elle-même. On identifie un polynôme P et la fonction polynôme $x \mapsto P(x)$ qui lui est naturellement associée. Chaque polynôme sera écrit selon les puissances décroissantes de X .

1. Explicitez $g''(x)$ pour $x > 0$.

Au vu des expressions de $g(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$, on se propose d'établir que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que, pour tout $x > 0$:

$$g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x) \sin^{(n)} x + Q_n(x) \sin^{(n+1)} x}{x^{n+1}}$$

Vous allez raisonner par récurrence sur n .

2. Il est clair que $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour $n \in \{0, 1, 2\}$; vous dresserez simplement un tableau donnant les expressions de P_n et Q_n pour ces valeurs de n . Voyez-vous apparaître une relation *simple* entre P_n et Q_n ?
3. On fixe $n \in \mathbb{N}$, et on suppose l'assertion $\mathcal{A}(n)$ acquise. Établissez l'assertion $\mathcal{A}(n+1)$; vous déterminerez des expressions de P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n .

Il résulte donc des questions III.2 et III.3 que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Montrez que P_n et Q_n ont tous leurs coefficients dans $\mathbb{Z}$; précisez le degré, la parité, et le coefficient dominant de ces polynômes.
5. Utilisez les formules établies à la question III.3 pour expliciter P_3 et Q_3 .
6. Deux polynômes U et V vérifient $U(x) \sin x + V(x) \cos x = 0$ pour tout $x > 0$. Montrer que U et V sont tous deux égaux au polynôme nul.
7. En partant de la relation $g(x) = \sin x$ et en appliquant la formule de Leibniz, ainsi que le résultat de la question précédente, mettez en évidence deux nouvelles relations liant P_n , Q_n , P_{n+1} et Q_{n+1} .
8. Justifiez alors la relation $P'_n = Q_n$, et montrez que P_n est solution d'une équation différentielle du second ordre, *très simple*, que l'on notera $\mathcal{E}_n$.
9. Il est clair que l'application $\Phi : T \mapsto T + T''$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Montrez que Φ induit un automorphisme Φ_n du sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ constitué des polynômes de degré n au plus; montrez ensuite que Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Il en résulte de ceci que P_n est l'unique solution polynomiale de l'équation différentielle $\mathcal{E}_n$.
10. $n \in \mathbb{N}$ est fixé, et p désigne la partie entière de $n/2$. Justifiez l'existence d'une famille $(a_k)_{0 \leq k \leq p}$ de réels vérifiant

$$P_n = \sum_{0 \leq k \leq p} a_k X^{n-2k}$$

et déterminez une expression de a_k faisant intervenir des factorielles et/ou des puissances, mais débarassé de tout signe $\prod$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminez les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + y = x^n$.

FIN EXTRAIT

