Exercice 6

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \left(\int_0^{+\infty} \ln(t)\, e^{-xt}\, dt \right)$.

$$\begin{cases} f(x,t) = \ln(t)\, e^{-xt} \\ \forall x \in \underbrace{\qquad}_{\mathbb{R};\ \text{ok}} , \forall t \in]0,+\infty[\end{cases}$$

On a : " $x \longrightarrow +\infty$ "

$\Rightarrow$ On prendra $x \in \underbrace{J}_{[\underbrace{\text{whatever}}_{?},\ +\infty[}$

$\forall x \in J = [\text{whatever}, +\infty[, \ \forall t \in]0,+\infty[$.

$$|f(x,t)| = |\ln t| e^{-xt} \leq \underbrace{\varphi(t)}_{\text{ne dép pas de } x}$$

φ intégrable sur $]0,+\infty[$

Exercice 6

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\int_0^{+\infty} \ln(t)\, e^{-xt}\, dt \right)$.

$$\begin{cases} f(x,t) = \ln(t)\, e^{-xt} \\ \forall x \in \underbrace{}_{\mathbb{R};\ \text{ok}},\ \forall t \in]0,+\infty[\end{cases}$$

On a : " $x \to +\infty$ "

$\Rightarrow$ On prendra $x \in \underbrace{J}_{[a,\,+\infty[}$ où $a > 0$

$\forall x \in J = [a, +\infty[,\ \forall t \in]0,+\infty[$

$|f(x,t)| = |\ln t|\, e^{-xt} \leq |\ln t|\, e^{-at} = \varphi(t)$ ne dép pas de x

$-x \leq -a$

$x \geq a > 0$

φ intégrable sur $]0,+\infty[$

Cours dit

$t \mapsto \ln t$ intégrable sur $]0, 1]$

càd $\displaystyle\int_0^1 |\ln t|\, dt$ CV

càd $\displaystyle\int_0^1 \ln t\, dt$ CV

$|\ln t| = -\ln t$

Scanned with CamScanner

1) Montrer que g est définie sur $[0,+\infty[$.

1- Soit $x \in [0,+\infty[$:

$t \longmapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ CPM sur $[0,+\infty[$

$\forall t \in [1,+\infty[$, $0 \leqslant \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$

et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ cv donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$ cv

d'où $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$ cv

Remarque : On peut faire $\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ mais il faut distinguer les cas de $x>0$ et $x=0$

$x \in \mathbb{R}$. Nature $\sum_{n \geqslant 0} \frac{e^{-xn^2}}{1+n^2}$? cv

$\sum \frac{1}{n^2}$ cv

$\forall n \geqslant 1$, $\frac{1}{1+n^2} \leqslant \boxed{\frac{1}{n^2}}$

Soit $x \in]0,+\infty[$, on a:

$$g'(x) - g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t^2}{1+t^2} e^{-xt^2}\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} -\frac{(1+t^2)}{1+t^2} e^{-xt^2}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} -e^{-xt^2}\,dt \overset{?}{=} \frac{-\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Intégrale de Gauss

Soit $x \in]0,+\infty[$, on a:

$$g'(x) - g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t^2}{1+t^2} e^{-xt^2} dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} -\frac{(1+t^2)}{1+t^2} e^{-xt^2} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} -e^{-xt^2} dt$$

On effectue un changement de variable tq $U = \sqrt{x}\,t$

donc $g'(x) - g(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{e^{-U^2}}{\sqrt{x}} dU = -\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-U^2} dU = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$x > 0$ fixé

$$-\int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt = -\int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{x}\,t)^2} dt$$

$U = \sqrt{x}\,t$

$dt = \frac{1}{\sqrt{x}} dU$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x}} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-U^2} dU}_{= \sqrt{\pi}/2}$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$