

Maths-2 Mines 2015

**A. Norme d'opérateur d'une matrice**

1.  $S^{n-1}$  est l'image réciproque du singleton  $\{1\}$  par l'application norme, donc elle est fermée et comme elle est bornée alors  $S^{n-1}$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$ .

L'application réelle  $x \in S^{n-1} \mapsto \|Mx\|$  est continue car elle est la restriction de la composée d'une application linéaire et de l'application norme (1-lipschitzienne). Or  $S^{n-1}$  est compact, une telle application est donc bornée et elle atteint ses bornes, d'où l'existence de

$$\|M\|_{\text{op}} = \max \{ \|Mx\| ; x \in S^{n-1} \}$$

2.  $\|\cdot\|_{\text{op}}$  est bien définie de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}_+$ 
  - **Séparation** : Si  $\|M\|_{\text{op}} = 0$ , alors pour tout vecteur  $x$  de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  on a  $Mx = 0$ , donc toutes les colonnes de  $M$  sont nulles, par suite  $M = 0$ .
  - **Homogénéité** : Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a :  $\forall x \in S^{n-1}, \|\lambda Mx\| = |\lambda| \|Mx\|$ , donc

$$\|\lambda M\|_{\text{op}} = |\lambda| \|M\|_{\text{op}}$$

- **Inégalité de Minkowski** : Pour  $M, N \in M_n(\mathbb{R})$  et  $x \in S^{n-1}$ , on a

$$\|(M + N)x\| = \|Mx + Nx\| \leq \|Mx\| + \|Nx\| \leq \|M\|_{\text{op}} + \|N\|_{\text{op}}$$

$\|M\|_{\text{op}} + \|N\|_{\text{op}}$  est un majorant de  $\{\|(M + N)x\| ; x \in S^{n-1}\}$ , par définition donc

$$\|M + N\|_{\text{op}} \leq \|M\|_{\text{op}} + \|N\|_{\text{op}}$$

Ceci justifie que  $\|\cdot\|_{\text{op}}$  est une norme sur  $M_n(\mathbb{R})$ .

En outre, pour  $x \in S^{n-1}$ , on a bien  $\|Mx\| \leq \|M\|_{\text{op}}$ . En conséquence pour tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , le vecteur  $\frac{x}{\|x\|} \in S^{n-1}$ , on a :  $\left\| M \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \|M\|_{\text{op}}$  ou encore  $\|Mx\| \leq \|M\|_{\text{op}} \|x\|$ . Cette dernière est aussi vraie pour  $x = 0$ .

Finalement pour  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , on utilise l'inégalité précédente en considérant le vecteur  $x - y$ , il vient

$$\|Mx - My\| \leq \|M(x - y)\| \leq \|M\|_{\text{op}} \|x - y\|$$

3. Soit  $\lambda \in \sigma(M)$  et  $x$  un vecteur propre unitaire de  $M$  associé à  $\lambda$ , alors

$$|\lambda| = \|\lambda x\| = \|Mx\| \leq \|M\|_{\text{op}}$$

Inversement, comme  $M$  est symétrique réelle, alors d'après le théorème spectral il existe une BON  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  constituée de vecteurs propres de  $M$  et notons  $\lambda_i$  la valeur propre associée à  $\varepsilon_i$ . Pour  $x \in S^{n-1}$ , on écrit  $x = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$ , il vient alors

$$\|Mx\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i M \varepsilon_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i \varepsilon_i \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2} \leq \max_{\lambda \in \sigma(M)} |\lambda| \|x\| \leq \max_{\lambda \in \sigma(M)} |\lambda|$$

D'où l'égalité demandée

4.  $J_n$  est une matrice réelle symétrique, dont le polynôme caractéristique  $\chi_{J_n} = X^{n-1}(X - n)$ . L'espace propre associé à 0, le noyau de  $J_n$ , est de dimension  $n - 1$  qui est l'hyperplan d'équation  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$  et c'est aussi l'orthogonal de la droite vectorielle  $\text{Vect}((1, \dots, 1))$ , alors l'espace propre associé à  $n$  est évidemment de dimension 1 qui est la droite  $\text{Vect}((1, \dots, 1))$ . En conséquence, d'après la question précédente,  $\|J_n\|_{\text{op}} = n$

5. Soit  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on considère  $e_j$  le  $j$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . On a

$$\|Me_j\| = \left\| \sum_{k=1}^n M_{k,j}e_k \right\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n M_{k,j}^2} \geq |M_{i,j}|$$

Donc  $|M_{i,j}| \leq \|Me_j\| \leq \|M\|_{\text{op}}$ . Ceci vrai pour tout  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , d'où l'inégalité demandée

6. Soit  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in S^{n-1}$ , on a  $Mx = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n M_{i,j}x_j \right) e_i$ , donc

$$\begin{aligned} \|Mx\|^2 &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n M_{i,j}x_j \right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left[ \left( \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 \right) \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right)}_{=1} \right] \quad \text{Cauchy-Schwartz} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 \end{aligned}$$

Donc pour tout  $x \in S^{n-1}$ , on a  $\|Mx\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2}$ . Par passage à la borne sup, on a

alors l'inégalité demandée.

En outre l'inégalité est une égalité, vu le calcul effectué au dessus, alors il existe un vecteur

$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in S^{n-1}$  tel que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  l'inégalité de Cauchy Schwartz  $\left| \sum_{j=1}^n M_{i,j}x_j \right| \leq$

$\sqrt{\sum_{j=1}^n M_{i,j}^2}$  est une égalité (Avec  $x \neq 0$ ) si et seulement si  $\exists \lambda_i \in \mathbb{R}$  tel que la  $i$ -ème ligne de

$M$  vaut  $\lambda_i x$ , c'est-à-dire que  $M = y^t x$  où  $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ . On conclut, alors que  $M$  est du rang 0 ou 1.

Inversement si  $\text{rg}(M) = 0$ , alors  $M = 0$  et l'égalité est triviale.

Si  $\text{rg}(M) = 1$ , on peut exprimer  $M = y^t x$  avec  $x$  de norme 1. Pour tout  $z \in S^{n-1}$ , on a

$$Mz = {}^t x z \cdot y \implies \|Mz\| = |{}^t x z| \|y\| \leq \|y\|$$

Donc  $\|M\|_{\text{op}} \leq \|y\|$  et elle est atteinte pour  $z = x$ . Finalement, vu que  $M_{i,j} = y_i x_j$ , on a

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i^2 x_j^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} = \|y\|$$

7. Soit  $M \in \Sigma_n$ . D'après la question précédente

$$\|M\|_{\text{op}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1} = n$$

En conséquence si  $\|M\|_{\text{op}} = n$  alors  $M_{i,j}^2 = 1$  pour tout  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Or d'après la question précédente  $\text{rg}(M) = 1$  et dont les coefficients sont dans  $\{-1, +1\}$ , alors on peut écrire  $M = \lambda^t \mu$  avec  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  dont les composantes sont dans  $\{-1, +1\}$ .

Inversement si  $M$  est de la forme précédente, on a  $M\mu = {}^t \mu \mu \lambda = n\lambda$

$$\left\| M \frac{\mu}{\|\mu\|} \right\| = \frac{1}{\|\mu\|} \|M\mu\| = \frac{n}{\|\mu\|} \|\lambda\| = n$$

On déduit que  $\|M\|_{\text{op}} = n$ . Ainsi le nombre de matrices de  $\Sigma_n$  pour lesquelles  $\|M\|_{\text{op}} = n$  égale au nombre des couples  $(\lambda, \mu)$  de  $\mathbb{R}^n$  dont les composantes sont dans  $\{-1, +1\}$  qui vaut  $2^{2n}$

### B. Variables aléatoires sous-gaussiennes

8. Soit  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $\cosh(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$ . Or  $\forall k \in \mathbb{N}$ , on a  $(2k)! \geq 2^k k!$  ( récurrence simple ), donc par positivité de  $t^{2k}$  on obtient

$$\cosh(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

9. La fonction  $\exp$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ . Comme  $x \in [-1, 1]$ , donc  $\frac{1+x}{2}, \frac{1-x}{2} \in [0, 1]$  et de somme 1. D'après l'inégalité de Jensen

$$\exp(tx) = \exp\left(\frac{1+x}{2}t + \frac{1-x}{2}(-t)\right) \leq \frac{1+x}{2} \exp(t) + \frac{1-x}{2} \exp(-t)$$

10. Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Montrons d'abord que la famille  $(\exp(tx)\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  de réels positifs est sommable. Pour tout  $x \in X(\Omega) \subset [-1, 1]$ , on utilise l'inégalité précédente, on obtient :

$$\exp(tx)\mathbb{P}(X = x) \leq \frac{1+x}{2} \exp(t)\mathbb{P}(X = x) + \frac{1-x}{2} \exp(-t)\mathbb{P}(X = x)$$

Les deux familles  $\left(\frac{1+x}{2} \exp(t)\mathbb{P}(X = x)\right)_{x \in X(\Omega)}$  et  $\left(\frac{1-x}{2} \exp(-t)\mathbb{P}(X = x)\right)_{x \in X(\Omega)}$

de réels positifs sont sommables de sommes respectives  $\mathbb{E}\left(\frac{1+X}{2} \exp(t)\right) = \frac{1}{2} \exp(t)$  et

$\mathbb{E}\left(\frac{1-X}{2} \exp(-t)\right) = \frac{1}{2} \exp(-t)$ , car  $X$  est centrée. Donc la famille  $(\exp(tx)\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est sommable et

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \exp(tx)\mathbb{P}(X = x) \leq \frac{\exp(t) + \exp(-t)}{2} = \cosh(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

Ainsi par le théorème du transfert  $\exp(tX)$  admet une espérance et

$$\mathbb{E}(\exp(tX)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \exp(tx)\mathbb{P}(X = x) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

Lorsque  $X$  est une variable aléatoire bornée par  $\alpha > 0$  et centrée, on pose  $Y = \frac{X}{\alpha}$ . La variable  $Y$  est bornée par 1 et centrée, donc elle 1-sous-gaussienne, ainsi pour tout  $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(\exp(t\alpha Y)) \leq \exp\left(\frac{(t\alpha)^2}{2}\right)$$

Ou encore  $\mathbb{E}(\exp(tX)) \leq \exp\left(\frac{t^2\alpha^2}{2}\right)$

11. Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Les variables aléatoires  $\exp(t\mu_1 X_1), \dots, \exp(t\mu_n X_n)$  sont mutuellement indépendantes et chacune admet une espérance, donc  $\prod_{i=1}^n \exp(t\mu_i X_i)$  admet une espérance et

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n \exp(t\mu_i X_i)\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(\exp(t\mu_i X_i))$$

Or pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la variable  $X_i$  est  $\alpha$ -sous-gaussienne  $E(\exp(t\mu_i X_i)) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2 \mu_i^2}{2}\right)$ .  
Donc  $\exp(tX)$  admet une espérance et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\exp(tX)) &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n \exp(t\mu_i X_i)\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(\exp(t\mu_i X_i)) \\ &\leq \prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2 \mu_i^2}{2}\right) \\ &\leq \exp\left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha^2 t^2 \mu_i^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right) \end{aligned}$$

12. Soit  $t > 0$ . L'événement  $[X \geq \lambda] = [\exp(tX) \geq \exp(t\lambda)]$ . La variable  $\exp(tX)$  est positive et admettant une espérance. D'après l'inégalité de Markov

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\exp(tX) \geq \exp(t\lambda)) &\leq \frac{\mathbb{E}(\exp(tX))}{\exp(t\lambda)} \\ &\leq \exp\left(\frac{t^2 \alpha^2}{2} - t\lambda\right) \end{aligned}$$

Remarquons que  $-X$  est aussi  $\alpha$ -sous-gaussienne et que  $[|X| \geq \lambda] = [X \geq \lambda] \cup [-X \geq \lambda]$  où  $[X \geq \lambda]$  et  $[-X \geq \lambda]$  sont des événements incompatibles, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X| \geq \lambda) &= \mathbb{P}(X \geq \lambda) + \mathbb{P}(-X \geq \lambda) \\ &\leq 2 \exp\left(\frac{t^2 \alpha^2}{2} - t\lambda\right) \end{aligned}$$

Ceci vrai pour tout  $t > 0$ . En particulier pour  $t = \frac{\lambda}{\alpha^2}$ , on obtient  $\frac{t^2 \alpha^2}{2} - t\lambda = -\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}$  et l'inégalité désirée

13. Les variables  $X$  et  $[X]$  sont positives et vérifient  $[X] \leq X < [X] + 1$ . Par domination,  $X$  admet une espérance si, et seulement, si  $[X]$  admet une espérance si, et seulement si la série  $\sum \mathbb{P}([X] \geq k)$  converge. Mais  $[X] \geq k = [X \geq k]$ , d'où l'équivalence est assurée.

Pour les inégalités, on tient compte de la croissance et la linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}([X]) \leq \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}([X]) + 1$$

où, d'après les données,  $\mathbb{E}([X]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X] \geq k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq k)$

14. L'inégalité est triviale si  $k = 1$  : La probabilité d'un événement est inférieure ou égale à 1.

Si  $k \geq 2$ , on a  $\left[\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right] = \left[|X| \geq \frac{\sqrt{2}\sqrt{\ln k}}{\beta}\right]$  et d'après la question 12 avec

$\lambda = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\ln k}}{\beta}$ , on a bien

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) &= \mathbb{P}\left(|X| \geq \frac{\sqrt{2}\sqrt{\ln k}}{\beta}\right) \\ &\leq 2 \exp\left(-\frac{\ln k}{\alpha^2 \beta^2}\right) = 2 \exp\left(-\ln\left(k^{\alpha^{-2} \beta^{-2}}\right)\right) \\ &= 2k^{-\eta} \end{aligned}$$

Où  $\eta = \alpha^{-2} \beta^{-2}$ . Lorsque  $\alpha\beta < 1$ , alors  $\eta > 1$ , la série de Riemann  $\sum_{k \geq 1} k^{-\eta}$  converge et,

par le critère de comparaison, la série ATP  $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right)$  converge, donc la

variable aléatoire  $\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)$  est une espérance et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)\right) &\leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \\ &\leq 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-\eta} = 1 + 2\zeta(\eta) \end{aligned}$$

### C. Recouvrements de la sphère

15. Soit  $\varepsilon > 0$ . Montrons qu'il existe  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_m \in K$  tels que

$$K \subset \bigcup_{1 \leq i \leq m} B_{x_i, \frac{\varepsilon}{2}}$$

Supposons le contraire c'est-à-dire  $\forall m \in \mathbb{N}^*$  et  $\forall x_1, \dots, x_m \in K$ , on a

$$\bigcup_{1 \leq i \leq m} B_{x_i, \frac{\varepsilon}{2}}$$

Soit  $x_1 \in K$ , alors  $K \not\subset B_{x_1, \frac{\varepsilon}{2}}$ , donc il existe  $x_2 \in K$  tel que  $x_2 \notin B_{x_1, \frac{\varepsilon}{2}}$ .  
On construit, par récurrence sur  $m \in \mathbb{N}^*$ , une suite  $(x_m)$  de  $K$  vérifiant :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, x_{m+1} \notin \bigcup_{i=1}^m B_{x_i, \frac{\varepsilon}{2}}$$

Par hypothèse,  $K$  est compact, donc la suite  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  admet une sous-suite  $(x_{\varphi(m)})_{m \in \mathbb{N}^*}$  convergente dans  $K$  donc de Cauchy. Alors il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, m \geq N \implies \|x_{\varphi(m+1)} - x_{\varphi(m)}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc  $x_{\varphi(m+1)} \in B_{x_{\varphi(m)}, \frac{\varepsilon}{2}} \subset \bigcup_{i=1}^{\varphi(m+1)-1} B_{x_i, \frac{\varepsilon}{2}}$ . Ce qui contredit  $x_{\varphi(m+1)} \notin \bigcup_{i=1}^{\varphi(m+1)-1} B_{x_i, \frac{\varepsilon}{2}}$

- 16. • Par absurde, si  $\Lambda$  n'est pas fini. Soit  $x_1 \in \Lambda$ , l'ensemble  $\Lambda \setminus \{x_1\}$  est infini, donc il existe  $x_2 \in \Lambda \setminus \{x_1\}$ , ainsi par récurrence on construit une suite  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  de  $\Lambda$  telle que  $\forall m \in \mathbb{N}^*, x_{m+1} \in \Lambda \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$ . Par hypothèse  $K$  est compact, donc il existe une suite extraite  $(x_{\varphi(m)})_{m \in \mathbb{N}^*}$  convergente. En particulier elle est de Cauchy, ainsi il existe  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\|x_{\varphi(m+1)} - x_{\varphi(m)}\| < \varepsilon$ . Absurde
- Soit  $A$  un ensemble du type considéré à la question précédente. Tout élément de  $\Lambda$  est contenu dans une boule du type  $B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}$  où  $a \in A$ .  
Inversement, vu que le diamètre de  $B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}$  vaut  $\varepsilon$ , une boule du type  $B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}$  où  $a \in A$  ne peut contenir qu'au plus un élément de  $\Lambda$ . Donc  $\text{Card} \Lambda \leq \text{Card} A$
- Sinon  $K \not\subset \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \varepsilon}$ . Il existe donc  $b \in K$  tel que  $b \notin \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \varepsilon}$ . Le nouveau ensemble  $\Lambda' = \Lambda \cup \{b\}$  est de cardinal  $\text{Card} \Lambda + 1$  et il vérifie pour tous  $x, y$  distincts dans  $\Lambda'$ ,  $\|x - y\| > \varepsilon$ . Ceci contredit que  $\Lambda$  est de cardinal maximal

17. Soit  $x \in B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}$  où  $a \in \Lambda$ , alors, par l'inégalité triangulaire

$$\|x\| \leq \|x - a\| + \|a\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 1$$

Donc  $x \in B_{0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}}$ , d'où l'inclusion  $B_{a, \frac{\varepsilon}{2}} \subset B_{0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}}$ .

Posons  $\Lambda = \{a_1, \dots, a_m\}$  avec  $\text{Card} \Lambda = m$ . Les compacts  $B_{a_1, \frac{\varepsilon}{2}}, \dots, B_{a_m, \frac{\varepsilon}{2}}$  sont deux à deux disjoints, donc d'après (ii)

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^m B_{a_i, \frac{\varepsilon}{2}}\right) = \sum_{i=1}^m \mu(B_{a_i, \frac{\varepsilon}{2}}) = m \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

D'autre part  $\bigcup_{i=1}^m B_{a_i, \frac{\varepsilon}{2}}$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$ , puisqu'il est union finie de compacts. En outre  $\bigcup_{i=1}^m B_{a_i, \frac{\varepsilon}{2}} \subset B_{0, 1+\frac{\varepsilon}{2}}$ , donc d'après (iii),

$$\mu \left( \bigcup_{i=1}^m B_{a_i, \frac{\varepsilon}{2}} \right) \leq \mu(B_{0, 1+\frac{\varepsilon}{2}}) = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

Alors  $m \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$ , puis  $m \leq \left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n$

18.  $S^{n-1}$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$ , alors pour  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  il existe un ensemble fini  $A$  de  $S^{n-1}$  tel que  $S^{n-1} \subset \bigcup_{a \in A} B_{a, \frac{1}{4}}$ . Vu que le diamètre de  $S^{n-1}$  vaut 2, alors il existe  $x, y \in S^{n-1}$  tels que  $\|x - y\| > \frac{1}{2}$ , donc il existe un ensemble  $\Lambda$  de  $S^{n-1}$  tel que pour tous  $x, y$  distincts dans  $\Lambda$ ,  $\|x - y\| > \varepsilon$ . Soit alors  $\Lambda_n$  un tel ensemble de cardinal maximal, d'après 16, on a

$$S^{n-1} \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} B_{a, \frac{1}{2}}$$

Enfin, d'après la question 17,  $\text{Card}\Lambda_n \leq 5^n$

### D. Norme d'une matrice aléatoire

19. • Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la variable aléatoire  $y_i = \sum_{j=1}^n x_j M_{i,j}^{(n)}$  avec  $M_{i,1}^{(n)}, \dots, M_{i,n}^{(n)}$  sont mutuellement indépendantes et  $\alpha$ -sous-gaussiennes avec  $\sum_{j=1}^n x_j^2 = 1$ . D'après la question 11 la variable  $y_i$  est  $\alpha$ -sous-gaussiennes
- Les variables  $y_1, \dots, y_n$  sont mutuellement indépendantes. En outre pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , d'après la question 14 : l'inégalité d'Orlicz, la variable aléatoire  $\exp(\gamma y_i^2)$  admet une espérance et  $\mathbb{E}(\exp(\gamma y_i^2)) \leq 5$ . Enfin  $\exp(\gamma y_1^2), \dots, \exp(\gamma y_n^2)$  sont mutuellement indépendantes et elles admettent des espérances, donc  $\exp(\gamma \|y\|^2) = \prod_{i=1}^n \exp(\gamma y_i^2)$  admet une espérance et

$$\mathbb{E}(\exp(\gamma \|y\|^2)) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n \exp(\gamma y_i^2)\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(\exp(\gamma y_i^2)) \leq 5^n$$

- Soit  $r > 0$ , la variable positive  $\exp(\gamma \|y\|^2)$  admet une espérance. D'après l'inégalité de Markov

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|y\| \geq r\sqrt{n}) &= \mathbb{P}(\exp(\gamma \|y\|^2) \geq e^{\gamma r^2 n}) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}(\exp(\gamma \|y\|^2))}{e^{\gamma r^2 n}} \leq (5e^{-\gamma r^2})^n \end{aligned}$$

20. Soit  $\Lambda_n$  une partie de  $S^{n-1}$  vérifiant les conditions de la question 18. Soit  $r > 0$  et supposons que  $\|M^{(n)}\|_{\text{op}} \geq 2r\sqrt{n}$ . D'après la question 1, il existe  $s \in S^{n-1}$  tel que :  $\|M^{(n)}s\| = \|M^{(n)}\|_{\text{op}}$ . Soit  $a \in \Lambda_n$  tel que :  $\|s - a\| \leq \frac{1}{2}$ . Par l'inégalité triangulaire

$$\|M^{(n)}s\| \leq \|M^{(n)}s - M^{(n)}a\| + \|M^{(n)}a\|$$

Soit

$$\|M^{(n)}a\| \geq \|M^{(n)}s\| - \|M^{(n)}s - M^{(n)}a\|$$

On fait appel à l'inégalité de la question 2

$$\|M^{(n)}a - M^{(n)}s\| \leq \|M^{(n)}\|_{\text{op}} \|a - s\| \leq \frac{1}{2} \|M^{(n)}\|_{\text{op}}$$

alors  $\|M^{(n)}a\| \geq \frac{1}{2} \|M^{(n)}\|_{\text{op}} \geq r\sqrt{n}$ .

Ainsi l'inclusion  $[\|M^{(n)}\|_{\text{op}} \geq 2r\sqrt{n}] \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} [\|M^{(n)}a\| \geq r\sqrt{n}]$ . Par la croissance de la probabilité

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\|M^{(n)}\|_{\text{op}} \geq 2r\sqrt{n}\right) &\leq \sum_{a \in \Lambda_n} \mathbb{P}\left(\|M^{(n)}a\| \geq r\sqrt{n}\right) \\ &\leq \sum_{a \in \Lambda_n} \left(5e^{-\gamma r^2}\right)^n \\ &\leq \mathbf{Card}\Lambda_n \left(5e^{-\gamma r^2}\right)^n \end{aligned}$$

Avec  $\mathbf{Card}\Lambda_n \leq 5^n$ , on obtient l'inégalité demandée