DÉNOMBREMENT
Résumé

1) Ensembles équipotents – Cardinal d'un ensemble fini

Déf 1

Soient E et F deux ensembles non vides.

On dit que E est équipotent à F si et ss'il existe une bijection de E sur F.

Déf 2

Soit E un ensemble fini non vide.

1) Le nombre d'éléments de E s'appelle le cardinal de E.

2) On le note $\mathrm{Card}(E)$.

Il se note aussi : $|E|$ ou $\# E$

Convention

$\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$

Prop 3

Deux ensembles finis équipotents ont le même cardinal.

2) Ensembles dénombrables – Ensembles au plus dénombrables

Déf 1

1) Un ensemble est dit dénombrable s'il est équipotent à $\mathbb{N}$.

2) Un ensemble est dit au plus dénombrable s'il est équipotent à une partie de $\mathbb{N}$.

NB : A dénombrable $\Longrightarrow$ A au plus dénombrable

Prop 2

Un ensemble est au plus dénombrable si et ss'il est fini ou dénombrable.

Prop 3

Le produit Cartésien d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.

Exemples

1) $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$ sont dénombrables.

2) Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.

3) $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

4) $\mathbb{N}^2$, $(\mathbb{N}^*)^2$, $\mathbb{Z}^2$ sont dénombrables.

3) Cardinal d'une réunion – Cardinal d'une différence

Prop 1

Soient A et B deux parties finies et disjointes d'un ensemble E.

On a :

$$\mathrm{Card}(A \sqcup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{Card}(B)$$

En général, on a :

Prop 2

Soit $n \geqslant 2$.

Soient $A_1, \dots, A_n$ des parties finies d'un ensemble E, deux à deux disjointes.

On a :

$$\boxed{\mathrm{Card}(A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n) = \mathrm{Card}(A_1) + \dots + \mathrm{Card}(A_n)}$$

Càd : $$\boxed{\mathrm{Card}\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(A_i)}$$

Prop 3

Soient A et B deux parties finies d'un ensemble E.

On a :

$$\boxed{\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)}$$

Prop 4

Soit E un ensemble fini. Soit A une partie de E.

1) A et son complémentaire $\bar{A}$ sont finis, et on a :

$$\boxed{\mathrm{Card}(\bar{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)}$$

2) i) $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(E)$.

ii) $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E) \iff A = E$

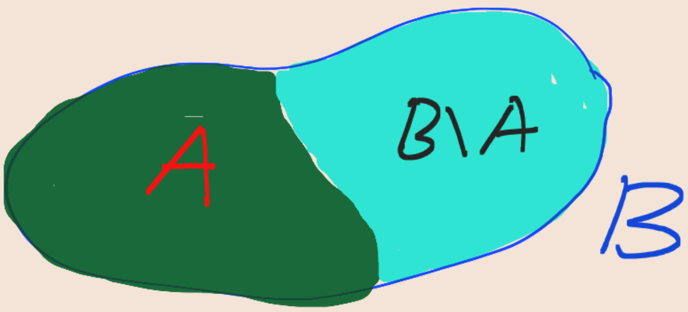
Prop 5

Soit E un ensemble fini.

Soient A et B deux parties E, telles que $A \subset B$.

On a :

$$\boxed{\mathrm{Card}(B \setminus A) = \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A)}$$



$A \subset B$

4) Cardinal d'un produit Cartésien

Prop 1

Soient E et F deux ensembles finis non vides.

$E \times F$ est aussi fini, et on a :

$$\boxed{Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)}$$

En général, on a :

Prop 2

Soit $n \geqslant 2$.

Soient $E_1, \dots, E_n$ des ensembles finis non vides.

Le produit Cartésien $E_1 \times \dots \times E_n$ est aussi fini, et on a :

$$\boxed{Card\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} card(E_i)}$$

Corollaire 3

Soit $n \geqslant 2$.

Soit E un ensemble fini non vide.

Le produit Cartésien E^n est aussi fini, et on a :

$$\boxed{Card(E^n) = (Card(E))^n}$$

4) Bijections d'un ensemble fini sur un ensemble fini

Prop

Soient E et F deux ensembles finis non vides tels que $Card(E) = Card(F)$.

Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$. On a :

$$\boxed{f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}}$$

5) Nombre d'applications – d'injections – de bijections – de permutations

a) Nombre d'applications

Prop 1

Soient E et F deux ensembles finis non vides.

Le nombre d'applications de E vers F est :

$$\boxed{Card(F^E) = Card(F)^{Card(E)}}$$

b) Nombre d'injections

Prop 1

Soient E et F deux ensembles finis non vides de cardinaux p et n respectivement, avec $p \leq n$.

Le nombre d'injections de E vers F est $n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)$

N B :

1) Le nombre d'injections de E vers F est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

2) Si $p > n$, le nombre d'injections de E vers F est 0.

c) Nombre de bijection – Nombre de permutations

Prop 1

Soient E et F deux ensembles finis non vides de cardinal commun n.

Le nombre de bijections de E vers F est $n!$.

Corollaire 2

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n.

Le nombre de permutations de E est $n!$.

Autrement dit :

$$\boxed{\mathrm{Card}(S(E)) = n!}$$

$S(E)$ étant l'ensemble des permutations de E.

d) Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments

Prop 1

Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est égal à C_n^p.

Rappel

C_n^p se note aussi $\binom{n}{p}$ et vaut $\dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

e) Nombre de parties d'un ensemble fini

Prop

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$.
Le nombre de parties de E est 2^n.

Autrement dit :

$$\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n}$$, où $n = \mathrm{card}(E)$