Espaces vectoriels normés
Partie 1
Résumé Lacunaire

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E sera un $\mathbb{K}$-esp vectoriel

I) Notion de norme

1) Définition et vocabulaire

Déf

On appelle **norme** sur E toute application N définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$[redacted] vérifiant :

1) $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Rightarrow$ [redacted]
2) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) =$ [redacted]
3) $\forall x, y \in E,\ N(x+y)$ [redacted]

2) Normes usuels (à retenir)

a) Normes usuelles sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Norme usuelle dans $\mathbb{R}$

[redacted] est une norme sur $\mathbb{R}$: $(\mathbb{R},$ [redacted]$)$ est un evn

Norme usuelle dans $\mathbb{C}$

[redacted] est une norme sur $\mathbb{C}$: $(\mathbb{C},$ [redacted]$)$ est un evn.

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

b) Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ (où $n \geq 1$)

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On note :

$\|x\|_1 =$ [redacted]

$\|x\|_2 =$ [redacted]

$\|x\|_\infty =$ [redacted]

Cas particulier usuels :

Les trois normes usuelles dans $\mathbb{R}^2$:

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$\|(x,y)\|_1 =$ [redacted]

$\|(x,y)\|_2 =$ [redacted]

$\|(x,y)\|_\infty =$ [redacted]

c) Normes usuelles sur $C([a,b], \mathbb{K})$

Ici $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$.

Notations

Pour $f \in C([a,b], \mathbb{K})$, on note :

$\|f\|_1 =$ [redacted]

$\|f\|_\infty =$ [redacted] ; $\|f\|_2 =$ [redacted]

3) Propriétés immédiates de la norme

Déf

Si [redacted], on dit que x est un vecteur unitaire.

Prop

Si $x \neq 0$, alors $\frac{x}{[redacted]}$ est un vecteur unitaire.

Prop

Soit $(E, \| \ \|)$ un evn.
Soient $x, y \in E$. On a :

1) $\|-x\|$ [redacted] $\|x\|$

2) $\|x-y\|$ [redacted] $\|y-x\|$

3) $\|x-y\| = 0 \Leftrightarrow$ [redacted]

4) i) $\|x-y\| \leq \|x\|$ [redacted] $\|y\|$

ii) $\big|$ [redacted] $\big| \leq \|x-y\|$

4) Boules et Sphères dans un evn

$(E, \| \ \|)$ sera un evn.

Déf

Soient $x, y \in E$.
La distance entre x et y est :

$$d(x,y) = \| [redacted] \|$$

Prop

Soient $x, y, z \in E$. On a :

1) $d(x,y)$ [redacted] $d(y,x)$

2) $d(x,$ [redacted] $) = \|x\|$

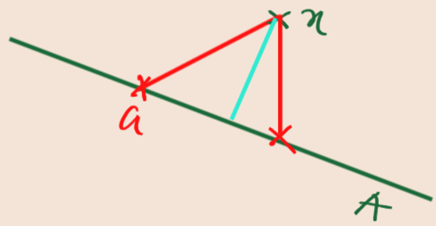
3) $d(x,z) \leq d(x,y)$ [redacted] (Inégalité triangulaire)

4) $d(x,y) = 0 \iff$ [redacted]

Déf

Soient $x \in E$ et $A \subset E$.
La distance de x à A est :

$d(x,A) =$ [redacted] $(d(x,a))$
$a \in A$



Déf

Soient $a \in E$ et $r > 0$.

1) La boule ouverte de centre a et de rayon r est :

$B(a,r) = \{x \in E /$ $\|$[redacted]$\|$ [redacted] $\}$

2) La boule fermée de centre a et de rayon r est :

$B_f(a,r) = \{x \in E /$ $\|$[redacted]$\|$ [redacted] $\}$

3) La Sphère de centre a et de rayon r est :

$S(a,r) = \{x \in E /$ $\|$[redacted]$\|$ [redacted] $\}$

Les boules ouverts dans l'evn $\mathbb{R}$ sont les [redacted], avec $a < b$!!

Exemple

On est encore dans l'evn $(\mathbb{C}, |\ |)$:

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$

1) $B(a,r) = \{z \in \mathbb{C} /$ [redacted] $< r\} = D(a,r)$; le disque ouvert de centre a et de rayon r.

2) $B_f(a,r) = \{z \in \mathbb{C} /$ [redacted] $< r\} = \bar{D}(a,r)$; le disque fermé de centre a et de rayon r.

Vocabulaire

Dans un evn $(E, \|\ \|)$:

1) La boule unité fermée est $B_f($[redacted]$) = \{x \in E /$ [redacted] $\leq$ [redacted]$\}$

2) La boule unité ouverte est $B($[redacted]$)$.

5) Parties convexes d'un evn

$(E, \|\ \|)$ sera un evn.

Déf

Soient $a, b \in E$.

Le segment $[a,b]$ est la partie de E définie par :

$$[a,b] = \{ta + \text{[redacted]}\, b \ / \ \text{[redacted]} \leq t \leq \text{[redacted]}\}$$

NB

$[a,b] = \{ta +$ [redacted] $b \ /$ [redacted] $\leq t \leq$ [redacted] $\}$

$[a,b] = \{(1-\lambda)a +$ [redacted] $b \ /$ [redacted] $\leq \lambda \leq$ [redacted] $\}$

Déf Soit A une partie non vide de E.
A est dite partie convexe de E si et ssi :

$\forall a,b \in A,$ [redacted] $\subset$ [redacted]

Autrement dit

$\forall a,b \in A, \forall t \in$ [redacted] $, ta +$ [redacted] $b \in$ [redacted]

Prop

1) Les sev de E sont des parties convexes.
2) Les boules ouvertes et fermées sont convexes.

6) Bornitude

$(E, \| \ \|)$ sera un evn.

a) Parties bornées

Déf

Une partie A de E est dite bornée si et ssi :

[redacted] $M \geq 0, \forall a \in A,$ [redacted] $\leq$ [redacted]

Prop

Les boules et les sphères sont des parties bornées de E.

b) Suites bornées dans un evn

$(E, \| \ \|)$ sera un evn.

Déf

Soit $(U_n)_n$ une suite à valeurs dans l'evn E.
$(U_n)_n$ est dite bornée si et ssi :

$$\boxed{\text{[redacted]}\ M \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \text{[redacted]} \leq \text{[redacted]}}$$

Notation

$B(\mathbb{N}, E)$: L'ensemble des suites bornées à valeurs dans E.

Prop

1) Toute combinaison linéaire de suites bornées dans un evn est une suite [redacted]
2) $B(\mathbb{N}, E)$ est un espace vectoriel.

c) Fonctions bornées dans un evn

$(E, \| \ \|)$ sera un evn.

Déf

Soit X un ensemble non vide.
Soit $f \in \mathcal{F}(X, E) = E^X$.
f est dite **bornée** si et ssi :

$$\boxed{\text{[redacted]}\ M \geq 0,\ \forall x \in X,\ \text{[redacted]} \leq \text{[redacted]}}$$

Notation

$B(X, E)$: L'ensemble des fonctions bornées sur X à valeurs dans E.

Prop

1) Toute combinaison linéaire de fonctions bornées à valeurs dans E est une fonction [redacted]
2) $B(X, E)$ est un espace vectoriel.

Notation

Soit $f \in B(X,E)$. Notons :

$\|f\|_\infty =$ [redacted] $\|$ [redacted] $\|$ $_{x \in X}$

Prop

$(B(X,E), \|\ \|_\infty)$ est un [redacted]

Autrement dit

$\|\ \|_\infty$ est une [redacted] sur $B(X,E)$.

Corollaire

$(B(\mathbb{N},E), \|\ \|_\infty)$ est un evn où :

$\|(u_n)_n\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}$ [redacted]

Réflexes à avoir

1) Soit $f \in B(X,E)$. On a :

$\forall x \in X, \|f(x)\|$ [redacted] $\|f\|_\infty$

2) Soit $U = (U_n) \in B(\mathbb{N},E)$. On a :

$\forall n \in \mathbb{N}, \|U_n\|$ [redacted] $\|U\|_\infty$

7) Norme produit

Soient $(E_1, \|\ \|_1), \dots, (E_s, \|\ \|_s)$ des evn.

Notons $E = E_1 \times \dots \times E_s$.

Notation

Pour $x = (x_1, \dots, x_s) \in E$, on note :

$\|x\| = \max($ [redacted] $, \dots ,$ [redacted] $) = \max_{1 \le i \le s}$ [redacted]

Réflexe à avoir

$\forall 1 \le i \le s, \|x_i\|_i$ [redacted] $\|x\|$

Prop :

$(E, \|\ \|)$ est un [redacted]

Vocabulaire

La norme $\|\ \|$ qu'on vient de définir sur l'esp $E_1 \times \dots \times E_s$ s'appelle **la norme** [redacted]

II) Limites dans un evn

$(E, \|\ \|)$ sera un evn.

1) Convergence d'une suite dans un evn

Prop

Soit $(U_n)_n$ une suite à valeurs dans l'evn E. Soit $l \in E$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$ [redacted]

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} \|$ [redacted] $\| = 0$

3) [redacted] $\varepsilon > 0$, [redacted] $N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant$ [redacted] , [redacted] $\leqslant \varepsilon$

Déf Soit $(U_n)_n$ une suite à valeurs dans l'evn E.

1) La suite (U_n) est dite **convergente** si et ssi il existe $l \in E$ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} \text{[redacted]} = \text{[redacted]}$$

2) Si $(U_n)_n$ n'est pas convergente, elle est dite [redacted]

Prop

Toute suite vectorielle **convergente** est [redacted]

Prop

Soit $(U_n)_n$ une suite à valeurs dans l'evn E. Soit $l \in E$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (U_n) = l \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \|U_n\| = \text{[redacted]}}$$

2) Opérations sur les suites convergentes

Sauf mention contraire, toutes les suites qu'on envisagera ici seront à valeurs dans l'evn E.

Prop (Combinaison linéaire)

Toute combinaison linéaire de suites convergentes est une suite [redacted]

On a précisément :

$$\lim_{n\to+\infty} (\alpha U_n + \beta V_n) = \text{[redacted]}$$

Prop

Soient $(U_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ deux suites convergentes.

La suite produit $(\alpha_n U_n)_n$ sera [redacted], et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} (\alpha_n U_n) = \text{[redacted]}$$

3) Suites à valeurs dans un produit cartésien d'evn

Dans ce paragraphe, on a :

$(E_1, \| \ \|_1), \dots, (E_s, \| \ \|_s)$ des evn.

$E = E_1 \times \dots \times E_s$, muni de la norme produit :

$$\|(x_1, \dots, x_s)\| = \text{[redacted]}_{1 \leq i \leq s} (\|x_i\|_i)$$

Soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on écrit :

$$x_n = (x_n^1, \dots, x_n^s) \in E_1 \times \dots \times E_s = E$$

Vocabulaire

Les suites $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$, où $1 \leq i \leq s$, sont dites les suites [redacted] de la suite $(x_n)_n$.

Prop (Bornitude)

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée $\Longleftrightarrow$ ($\forall 1 \leq i \leq s$, $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ est [redacted])

Autrement dit

(x_n) bornée si et ssi toutes ses suites composantes sont [redacted]

Prop (Convergence)

1) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Longleftrightarrow$ ($\forall 1 \leq i \leq s$, $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ [redacted])

2) Le cas échéant, on a :

$$\boxed{\lim_n x_n = (\lim_n \text{[redacted]}, \dots, \lim_n \text{[redacted]})}$$

Autrement dit :

(x_n) converge si et ssi toutes ses suites composantes [redacted]

4) Normes équivalentes

Déf

Soient N_1 et N_2 deux normes sur E.

N_1 et N_2 sont dites **équivalentes** si et ssi :

$$\boxed{\exists\, \alpha, \beta > 0,\ \text{[redacted]} \leq N_1 \leq \text{[redacted]}}$$

Prop

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) N_1 et N_2 sont dites équivalentes
2) $\exists\, \alpha, \beta > 0,\ \alpha N_2 \leq$ [redacted] $\leq \beta N_2$
3) $\exists\, \alpha, \beta > 0,\ \alpha N_1 \leq$ [redacted] $\leq \beta N_1$

Prop (Bornitude)

Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E.

1) Soit $A \subset E$.
   (A bornée pour N_1) $\Longleftrightarrow$ (A bornée pour [redacted])
2) Soit $(U_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$.
   ($(U_n)_n$ bornée pour N_1) $\Longleftrightarrow$ ($(U_n)_n$ bornée pour [redacted])
3) Soit $f \in E^X$ (où X ensemble non vide).
   (f bornée pour N_1) $\Longleftrightarrow$ (f bornée pour [redacted])

Prop (convergence d'une suite)

Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E.

Soient $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ et $l \in E$. On a :

$$\boxed{\Big((x_n)_n \text{ converge vers } l \text{ pour } N_1\Big) \Longleftrightarrow \Big((x_n)_n \text{ converge vers [redacted] pour [redacted]}\Big)}$$

5) Cas de la dimension finie

Prop

Dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes

$\dim(E) = d \geq 1$

$B = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$ une base de E.

Soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$; une suite à valeurs dans E.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$x_n = x_n^1 \varepsilon_1 + \dots + x_n^d \varepsilon_d = \sum_{i=1}^{d} x_n^i \varepsilon_i$$

Ici

Vocabulaire Les suites $(x_n^i)_n$ s'appellent les suites [redacted] de la suite $(x_n)_n$ dans la base B.

Prop (Bornitude)

$(x_n)_n$ est bornée si et ssi toutes ses suites composantes [redacted]

Prop (Convergence)

1) $(x_n)_n$ est converge si et si toutes ses suites composantes [redacted]

2) Le cas échéant, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \sum_{i=1}^{d} \text{[redacted]} \cdot \varepsilon_i$$

Soit $(A_n)_n$ une suite matricielle à valeurs dans $M_p(\mathbb{K})$.

Notons $A_n = \left(A_n^{ij}\right)_{1\leq i,j\leq p}$.

1) $(A_n)_n$ bornée $\iff \left(\forall i,j \in [\![1,p]\!],\ (\text{[redacted]})_n \text{ est bornée}\right)$

2) i) $(A_n)_n$ converge $\iff \left(\forall i,j \in [\![1,p]\!],\ (\text{[redacted]})_n \text{ converge}\right)$

ii) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\lim_{n} A_n = \left(\text{[redacted]}\right)_{1\leq i,j\leq p}}$$

Autrement dit : $\boxed{\forall 1\leq i,j\leq p,\ \left(\lim_{n} A_n\right)_{ij} = \text{[redacted]}}$

À retenir

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_n = A \iff \left(\forall i,j,\ \lim_{n\to+\infty} (A_n)_{ij} = \text{[redacted]}\right)}$$

6) Suites extraites _ Valeurs d'adhérences

$(E, \| \ \|)$ evn.

Déf 1

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

Une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est toute suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où

$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ application [redacted]

Déf 2

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. Soit $a \in E$[redacted]

a est dit valeur [redacted] de la suite $(x_n)_n$ si et ssi a est la limite de l'une de ses suites extraites.

Prop 3

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

1) Si $(x_n)_n$ converge alors toutes ses sous-suites convergent vers [redacted]

2) Autrement dit, [redacted] est la seule valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$.

Corollaire 4

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

1) Si $(x_n)_n$ possède deux sous-suites qui convergent vers deux limites différentes, alors [redacted]

2) Autrement dit :

Si $(x_n)_n$ possède deux valeurs d'adhérence distinctes alors elle [redacted]

III) Topologie dans un evn

$(E, \| \ \|)$ sera un evn.

1) Parties ouvertes d'un evn

Déf 1

Soit $O \subset E$.

O est dit **ouvert** de E si et ssi :

1) $O = \emptyset$

ou

2) [redacted]

NB1 $\emptyset$ est par définition un [redacted]

Prop 2

1) E est un ouvert de E.
2) Les boules ouvertes sont [redacted] de E.

Prop 3

Les singletons, les boules fermées et les sphères [redacted] des ouverts de E.

Prop 4

Dans l'evn $\mathbb{R}$, les intervalles [redacted] sont des ouverts.

Prop 5

1) Une réunion [redacted] d'ouverts de E est un ouvert de E.
2) Une intersection [redacted] d'ouverts de E est un ouvert de E.

2) Parties fermées d'un evn

Déf 1

Soit $F \subset E$.

F est dite **partie fermée** de E si et ssi [redacted] de E.

NB On dit aussi *fermé* de E.

Réflexe ⚠

A^C [redacted] $\Longleftrightarrow$ A fermé

B^C [redacted] $\Longleftrightarrow$ B ouvert

Prop 2

1) ϕ et E sont des fermés de E.
2) Les singletons sont des [redacted] de E.
3) Les boules fermées et les sphères sont des [redacted] de E.

Prop 3

Dans l'evn $\mathbb{R}$, tous les intervalles fermés [redacted]

Prop 4

1) Une intersection [redacted] de fermés de E est un fermé de E.
2) Une réunion [redacted] de fermés de E est un fermé de E.

Prop 5

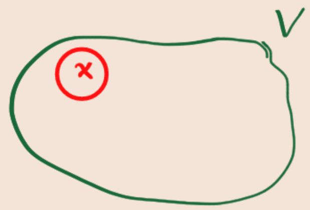
Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E.
Soit $A \subset E$. On a :

1) (A ouvert pour N_1) $\Longleftrightarrow$ (A [redacted] pour N_2)
2) (A fermé pour N_1) $\Longleftrightarrow$ (A [redacted] pour N_2)

3) Voisinage d'un point

Déf 1 Soient $x \in E$ et $V \subset E$.

V est dit voisinage de x si et ssi :



([redacted])

Prop 2

Un ouvert non vide est voisinage de chacun de ses points.

4) Intérieur — Adhérence

Déf 1 (Point intérieur à une partie)

Soit $A \subset E$. Soit $x \in A$.

x est dit un point intérieur de A si et ssi :

[redacted]

Vocabulaire L'ensemble des points intérieurs de A s'appelle l'intérieur de A, et se note [redacted]

$x \in \mathring{A} \Longleftrightarrow$ ([redacted]) réflexe

Prop 2

Soit $A \subset E$.

1) $\mathring{E} =$ [redacted]
2) $\mathring{A}$ [redacted] A [redacted]
3) $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{O \text{ ouvert} \\ O \subset A}} O$; la réunion des ouverts contenus dans A.
4) $\mathring{A}$ est le plus [redacted] ouvert conten[redacted] A.
5) $\mathring{A} = A \Longleftrightarrow A$ [redacted]

Déf 3 (Point adhérent à une partie)

Soit $A \subset E$. Soit $x \in E$.

x est dit un **point adhérent** à A si et ssi :

[redacted]

Vocabulaire L'ensemble des points adhérents à A s'appelle **adhérence** de A, et se note [redacted]

$x \in \bar{A} \iff ($ [redacted] $)$ — réflexe

Prop 4

Soit $A \subset E$.

1) $\bar{E} =$ [redacted]

2) [redacted] A [redacted] $\bar{A}$ [redacted]

3) $^c(\bar{A}) = \overline{(^cA)}$

4) $\bar{A}$ est un [redacted]

5) $\bar{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ F \supset A}} F$; l'intersection de tous les fermés contenant A.

6) $\bar{A}$ est le plus [redacted] fermé conten[redacted]

7) $\bar{A} = A \iff A$ est un [redacted]

Prop 5

Soit $A \subset E$. Soit $x \in E$. On a :

$d(x, A) = 0 \iff x \in$ [redacted]

Déf 6

Soit $A \subset E$.

La **frontière** de A est la partie de E définie par :

$Fr(A) = \bar{A}$ [redacted] $\mathring{A}$

5) Partie dense dans un evn

Déf 1 Soit A une partie de E.

A est dite **dense** dans E ssi $\bar{A}$ [redacted]

Prop 2 Soit A une partie de E.

1) A est dense dans E ssi toute boule ouverte [redacted]
2) Autrement dit :

$\forall x \in E, \forall r > 0, B(x,r)$ [redacted]

6) Caractérisations séquentielles

Prop 1 (Caractérisation séquentielle d'un point adhérent)

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $x \in \bar{A}$
2) x est limite d'une suite [redacted]

Autrement dit

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow (\exists (a_n) \in$ [redacted] $, x =$ [redacted] $)$

Corollaire 2 (Caractérisation séquentielle d'un fermé)

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) A est un fermé.
2) Toute suite convergente à valeurs dans A, sa limite [redacted]

Autrement dit

$$\left(A \text{ est un fermé}\right) \iff \left(\left(\begin{array}{l} \lim_n x_n = l \in E \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in \text{[redacted]} \end{array} \right) \Rightarrow \left(l \in \text{[redacted]} \right) \right)$$

Corollaire 3 (Caractérisation séquentielle de la densité)

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) A est dense dans E
2) Tout élément de [redacted] est limite d'une suite [redacted]

Autrement dit

$$\left(A \text{ est dense dans } E\right) \iff \left(\forall x \in \text{[redacted]},\ \exists (a_n)_n \in \text{[redacted]}^{\mathbb{N}},\ \lim_{n \to +\infty} a_n = x\right)$$

7) Parties Compactes d'un evn

Déf 1

Soit $K \subset E$.

K est dite partie compacte de E si et ssi de toute suite à valeurs dans [redacted], on peut extraire une sous-suite convergente dans [redacted]

Càd

K est dite partie compacte de E $\iff$ (Si $(x_n)_n \in$ [redacted]$^{\mathbb{N}}$, alors il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ telle que $\lim_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)} = l \in$ [redacted])

Autrement dit

K est dite partie compacte de E $\iff$ (Toute suite à valeurs dans [redacted] possède une valeur d'adhérence appartenant à [redacted])

Prop 2

Si K est un compact alors K est [redacted]

Prop 3 Soit $(x_n)_n$ une suite à valeur dans [redacted] K. On a :

$$\left((x_n)_n \text{ converge}\right) \Longleftrightarrow \left((x_n)_n \text{ possède une unique valeur d'adhérence}\right)$$

Attention

Une sous-suite de $(x_{\varphi(n)})_n$ est de la forme $(x$ [redacted] $(\varphi(n)))_n$ non pas $(x$ [redacted] $(n)))_n$.

Prop 4

Le produit cartésien de deux compacts est [redacted]

Càd

Si $\begin{pmatrix} K_1 \text{ compact de } E_1 \\ K_2 \text{ compact de } E_2 \end{pmatrix}$ alors $K_1 \times K_2$ [redacted] de [redacted]

Corollaire 5

Soit $n \geq 2$.

Si $K_1, \dots, K_n$ sont des compacts des evn $E_1, \dots, E_n$ respectivement, alors $K_1 \times \dots \times K_n$ est un [redacted] de l'evn [redacted]

IV) Espaces vectoriels normés complets

Déf 1 Soit $(U_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$.

$(U_n)_n$ est dite suite de Cauchy si et ssi :

$(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N,$ [redacted] $\leq \varepsilon)$

Prop 2

1) Toute suite de Cauchy est bornée.
2) Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

NB

On a :

$(U_n)_n$ converge $\Longrightarrow$ $(U_n)_n$ suite de Cauchy

Toutefois, la réciproque n'est pas toujours vraie.
Un evn dans lequel la réciproque est vrai s'appelle espace [redacted]
ou espace de B[redacted]

Dans un espace complet, on a l'équivalence :

$(U_n)_n$ [redacted] $\Longleftrightarrow$ $(U_n)_n$ suite [redacted]

Prop 3 (admise)

Tout esp de dimension finie est un espace [redacted]

Fin