Proposition de corrigé - Épreuve commune de Mathématiques

CORRECTION

Problème II : Analyse

A. Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = (-x)\,\mathrm{sh}\left(-\frac{1}{x}\right) = x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) \quad \text{car sh est impaire.}$$

Donc $\boxed{f \text{ est paire.}}$

2. **(a)** Au voisinage de 0, $\mathrm{sh}(X) \underset{X\to 0}{\sim} X$.

<u>Limite en $+\infty$:</u> Pour x tendant vers $+\infty$, on pose $X = 1/x$. Ainsi X tend vers 0^+ et

$$x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\mathrm{sh}(X)}{X} \underset{X\to 0^+}{\sim} 1.$$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1.}$

<u>Limite en $-\infty$:</u> Par parité, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1.}$

(b) <u>Limite en 0 :</u> Pour x tendant vers 0^+, on pose $X = 1/x$. Ainsi X tend vers $+\infty$ et $x\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\mathrm{sh}(X)}{X} = \dfrac{e^X - e^{-X}}{2X}$. Or $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ par croissances comparées et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^{-X}}{X} = 0$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.}$

Par parité de f, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty.}$

3. Sur $\mathbb{R}^*$, la fonction $x \longmapsto \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable. En effet c'est la composée de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et de la fonction sh qui est dérivable sur $\mathbb{R}$. Puis par produit de fonctions dérivables, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) = \boxed{\left[\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right).}$$

4. Pour $X \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\varphi(X) = \mathrm{th}(X) - X$. φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée

$$\forall X > 0, \quad \varphi'(X) = 1 - \mathrm{th}^2(X) - 1 = -\mathrm{th}^2 X < 0.$$

Donc φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(X) < \varphi(0)$ soit $\boxed{\mathrm{th}(X) < X.}$

5. Comme la fonction ch est strictement positive, on trouve d'après la question A.4. que f' est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit le tableau de variations suivant (grâce à la parité de f) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

6. Pour obtenir le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $X \longmapsto \dfrac{\mathrm{sh}(X)}{X}$, on effectue le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction sh :

$$\mathrm{sh}(X) = X + \frac{X^3}{6} + \frac{X^5}{120} + o(X^5).$$

Donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{sh}(X)}{X} = 1 + \frac{X^2}{6} + \frac{X^4}{120} + o(X^4).}$$

7. On pose $X = \frac{1}{x}$. Ainsi lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, X tend vers 0. Donc pour X au voisinage de 0, on a d'après la question A.6,

$$f\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\operatorname{sh}(X)}{X} = 1 + \frac{X^2}{6} + \frac{X^4}{120} + o(X^4),$$

soit pour x au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$,

$$f(x) = 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Il suffit donc de prendre $\boxed{a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = \frac{1}{6},\ a_3 = 0,\ a_4 = \frac{1}{120}.}$

8. La fonction $x \longmapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de deux fonctions dérivables (fonction f et fonction inverse). De plus, pour $x \in \mathbb{R}^*$ au voisinage de 0

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4),$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, ce qui prouve que f se prolonge par continuité en 0. En notant F ce prolongement, $F(0) = 1$ et F admet donc le développement limité suivant en 0 :

$$F(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4).$$

Ainsi F admet un développement limité à l'ordre 4 en 0, donc aussi un développement limité à l'ordre 1 en 0 ce qui prouve que F est dérivable en 0.

Finalement, F étant aussi dérivable sur $\mathbb{R}^*$, on a prouvé que $\boxed{\text{la fonction } F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$

C. Une équation différentielle

12. On introduit l'équation homogène (E_0) associée : $xy' + y = 0$. Sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \longmapsto x$ est continue et ne s'annule pas. De plus une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto \ln|x|$. Et sur $\mathbb{R}_+^*$, $|x| = x$. Donc les solutions de (E_0) sont $y(x) = \lambda \exp(-\ln x) = \frac{\lambda}{x}$, où λ est un paramètre réel quelconque.

Pour obtenir une solution particulière de (E), on utilise la méthode de variation de la constante. On considère λ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On note alors pour $x > 0$, $y(x) = \frac{\lambda(x)}{x}$. y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $y'(x) = \frac{x\lambda'(x) - \lambda(x)}{x^2}$. Ainsi

$$y \text{ est solution de } (E) \iff \forall x > 0,\ \lambda'(x) = \operatorname{ch} x.$$

Prenons par exemple $\lambda(x) = \operatorname{sh} x$ pour tout $x > 0$ soit $y(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x}$ pour tout $x > 0$. Les solutions de (E) sont la somme de la solution particulière que l'on vient d'exhiber et des solutions de l'équation homogène (E_0). Les solutions de (E) sont donc

$$\boxed{x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{\lambda + \operatorname{sh} x}{x} \in \mathbb{R} \quad (\lambda \text{ étant une constante réelle quelconque}).}$$

13. Sur $\mathbb{R}_-^*$, on effectue les mêmes calculs, et on trouve encore que les solutions sont

$$\boxed{x \in \mathbb{R}_-^* \longmapsto \frac{\mu + \operatorname{sh} x}{x} \in \mathbb{R} \quad (\mu \text{ étant une constante réelle quelconque}).}$$

14. On procède par analyse/synthèse.

Analyse : Supposons qu'il existe une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E). Alors, d'après les questions C.12. et C.13. il existe deux constantes réelles λ et μ telles que

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{\mu + \operatorname{sh} x}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\lambda + \operatorname{sh} x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Comme y est continue en 0 (car dérivable) les limites de y en 0^+ et en 0^- sont finies et égales, ce qui impose que $\lambda = \mu = 0$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $y(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x}$. De plus y est continue en 0. Par unicité du prolongement par continuité en 0 de l'application $x \longmapsto \frac{\operatorname{sh} x}{x}$ la fonction y est donc égale à la fonction F, définie dans la question $A.8$.

Synthèse : La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après A.8. De plus, sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, $F(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x}$ donc F est bien solution de (E) sur ces deux intervalles d'après les questions C.12 et C.13. Enfin, $F(0) = 1$ donc en $x = 0$ on a bien $0F'(0) + F(0) = \operatorname{ch} 0$. Finalement, $\boxed{F \text{ est bien l'unique fonction dérivable sur } \mathbb{R}, \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}.}$

D. Etude d'une suite

15. La fonction f est continue strictement décroissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
Par ailleurs $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Donc f réalise une bijection de l'intervalle $]0,+\infty[$ sur l'intervalle $]1,+\infty[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$ appartient à $]1,+\infty[$. Il possède donc un unique antécédent dans $]0,+\infty[$ par la fonction f. On note u_n cet unique antécédent.

16. D'après la question précédente, la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $]0,+\infty[$ sur l'intervalle $]1,+\infty[$. En notant h la bijection réciproque, la fonction h est continue sur $]1,+\infty[$, strictement monotone et de même monotonie que f sur $]0,+\infty[$. Donc h est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ et d'après les limites obtenues pour f, on obtient le tableau de variations suivant

y	1	$+\infty$
h	$+\infty$ ↘	0

A partir de là, montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
Pour $n \in \mathbb{N}$, $1 + \dfrac{1}{n} \geq 1 + \dfrac{1}{n+1}$ donc $f(u_n) \geq f(u_{n+1})$. En appliquant la fonction h, qui est strictement décroissante, on trouve que $u_n \leq u_{n+1}$. Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$

17. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = h\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$ et $\lim\limits_{y\to 1} h(y) = +\infty$ donc par composition de limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

18. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(u_n) = 1 + \dfrac{1}{n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, ce qui permet d'utiliser le développement asymptotique obtenu dans la question A.7. et d'obtenir

$$1 + \frac{1}{6u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right) = 1 + \frac{1}{n}.$$

D'où

$$\frac{1}{6u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right) = \frac{1}{n}$$

soit $\dfrac{1}{6u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, donc $\dfrac{6u_n^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et en prenant la racine carrée, $\dfrac{\sqrt{6}u_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ d'où finalement

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n}{6}}.}$$

E. Une fonction définie par une intégrale

19. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x = 2\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \boxed{\operatorname{sh} 2x.}$

20. Pour tout $x > 0$, $J(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt - \int_1^{x/2} f(t)\,dt$. En notant u la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ J(x) = u(x) - u(x/2).$$

Or la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car c'est l'unique primitive qui s'annule en 1 de la fonction continue f. Par composée, la fonction $x \longmapsto u(x/2)$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc J est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour $x > 0$, $u'(x) = f(x)$. Donc pour tout $x > 0$,

$$J'(x) = u'(x) - \frac{1}{2}u'\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) - \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) = x\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{4}\operatorname{sh}\left(\frac{2}{x}\right).$$

Or, $\operatorname{sh}\left(\dfrac{2}{x}\right) = 2\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right)\operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ d'après la question E.19. Donc pour tout $x > 0$,

$$J'(x) = x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)\left[1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right] \qquad \text{donc} \qquad \boxed{J'(x) = f(x)\left[1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right].}$$

21. Sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est strictement positive. Résolvons sur $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation

$$1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0.$$

Celle-ci équivaut à $\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 2$. Soit encore, en remplaçant la fonction ch par son expression à l'aide de la fonction exponentielle,

$$\exp\left(\frac{1}{x}\right) + \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \leq 4.$$

On pose $X = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ et l'inéquation à résoudre devient $X + \dfrac{1}{X} \leq 4$, avec $X > 0$. En multipliant par X qui est positif, on obtient l'inéquation équivalente

$$X^2 + 1 \leq 4X,$$

qui est une inéquation du second degré équivalente (après résolution) à $2 - \sqrt{3} \leq X \leq 2 + \sqrt{3}$.
Ainsi $2 - \sqrt{3} \leq \exp\left(\frac{1}{x}\right) \leq 2 + \sqrt{3}$. Donc en appliquant la fonction logarithme népérien qui est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient la condition équivalente

$$\ln(2 - \sqrt{3}) \leq \frac{1}{x} \leq \ln(2 + \sqrt{3}).$$

Or $x > 0$ donc on trouve finalement $x \geq \dfrac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})}$.

En conclusion pour $x > 0$,

$$1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq \frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})}.$$

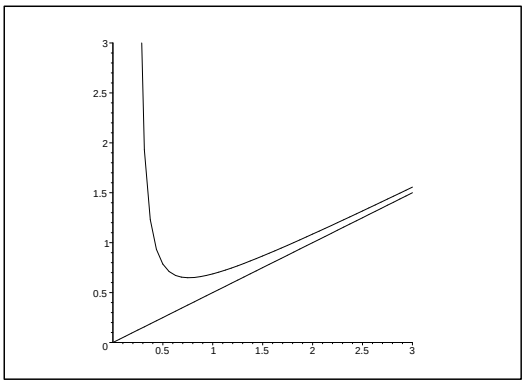
D'où le tableau de signes suivant, où on a noté $\alpha = \dfrac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})}$.

x	0		α		$+\infty$
$J'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

22. En utilisant les limites données par l'énoncé en 0^+ et en $+\infty$, on obtient le tableau de variations suivant

x	0		α		$+\infty$
J	‖ $+\infty$	↘	$J(\alpha)$	↗	$+\infty$

23.



FIN