Espaces Préhilbertiens Réels
SUP - Résumé

E sera un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension quelconque (finie ou non)

I) Généralités

1) Produit scalaire

Déf

On appelle *produit scalaire* sur E toute application ϕ de $E\times E$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

1) $\forall x, x' \in E, \forall y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \phi(\alpha x + x', y) = \alpha \phi(x,y) + \phi(x', y)$

   « ϕ est dite *linéaire par rapport à la $1^{ère}$ place* »

2) $\forall x \in E, \forall y, y' \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \phi(x, \alpha y + y') = \alpha \phi(x,y) + \phi(x, y')$

   « ϕ est dite *linéaire par rapport à la $2^{ème}$ place* »

3) $\forall x, y \in E,\ \phi(x,y) = \phi(y,x)$

   « ϕ est dite *symétrique* »

4) $\forall x \in E\setminus\{0\},\ \phi(x,x) > 0$

   « ϕ est dite *définie positive* »

Prop

S! $\left(\begin{array}{l}\phi \text{ est un produit} \\ \text{scalaire sur } E\end{array}\right) \iff \begin{cases} 1)\ \phi \text{ est symétrique} \\ 2)\ \phi \text{ est linéaire par rapport à la } 1^{ère} \text{ place} \\ 3)\ \forall x \in E,\ \phi(x,x) \geq 0 \\ 4)\ \forall x \in E,\ \phi(x,x) = 0 \implies x = 0 \end{cases}$

Produits scalaires usuels : (à savoir démontrer)

a) Produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

b) Produit scalaire usuel sur $C([a,b], \mathbb{R})$

Pour f et $g \in C([a,b], \mathbb{R})$. $(a < b \in \mathbb{R})$.

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) \, dt.$$

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $C([a,b], \mathbb{R})$.

c) Produit scalaire usuel sur $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques.

Pour f et $g \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) g(x) \, dx$$

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

d) Produit scalaire usuel sur $M_{n1}(\mathbb{R})$

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in M_{n1}(\mathbb{R})$.

$$\langle X \mid Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $M_{n1}(\mathbb{R})$.

Notez très bien que :

$$\boxed{\langle X \mid Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tX \cdot Y}$$

e) Produit scalaire usuel sur $M_n(\mathbb{R})$

Pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

$$\langle A \mid B \rangle = tr({}^tA \cdot B)$$

$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

Notez très bien que :

$$\langle A \mid B \rangle = tr({}^tA \cdot B) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} A_{ij} B_{ij}$$

où $A = (A_{ij})$ et $B = (B_{ij})$

Déf

1) Un $\mathbb{R}$-esp vect muni d'un produit scalaire s'appelle espace préhilbertien réel.

2) Un espace préhilbertien réel de dimension finie s'appelle espace euclidien.

Prop

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un esp préhilb réel, et $x, y \in E$. On a :

1) $\|x\|^2 = \langle x | x \rangle$

2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \|\lambda x\| = |\lambda| . \|x\|$

4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

5) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x | y \rangle$

6) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x | y \rangle$

Prop

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un esp préhilb réel, et $x, y, z \in E$. On a :

1) $d(x,y) = d(y,x)$

2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (inégalité triangulaire)

Lemme (à savoir en tant qu'outil)

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Si la fonction $x \mapsto ax^2+bx+c$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ alors $\Delta \leq 0$; où $\Delta = b^2-4ac$.

Prop (L'inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ un esp préhilb réel, et $x,y \in E$. On a :

1) $\langle x|y\rangle^2 \leq \langle x|x\rangle \langle y|y\rangle$ (c'est l'ICS)

2) $\langle x|y\rangle^2 = \langle x|x\rangle \langle y|y\rangle \iff (x,y)$ liée

NB :

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit aussi :

$\boxed{\langle x|y\rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2}$ ou encore $\boxed{|\langle x|y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|}$

Corollaire

1) $\forall f,g \in C([a,b],\mathbb{R})$, $\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right) \times \left(\int_a^b g^2\right)$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

Corollaire (L'inégalité triangulaire)

Soit $(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ un esp préhilb réel. On a :

$$\forall x,y \in E, \ \|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$$

Prop

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un esp préhilb réel. Soient $x, y \in E$, on a :

1) $\langle x | y \rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right)$

« l'identité de polarisation »

2) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right)$

« l'identité du parallelogramme »

2) Orthogonalité

Dans ce paragraphe, $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ sera un esp préhilbertien réel.

Déf

Soient $x, y \in E$.

x et y sont dits orthogonaux si et ssi $\langle x | y \rangle = 0$.

Déf

Soient $A \subset E$ et $x \in E$.

x est dit orthogonal à A si et ssi x est orthogonal à tout élément de A.

Notation

$A^{\perp}$: l'ensemble des vecteurs orthogonaux à A.

$$x \in A^{\perp} \underset{\text{par définition}}{\iff} \left(\forall a \in A,\ \langle x | a \rangle = 0 \right)$$

Prop

1) i) $\forall x \in E, \langle x|0\rangle = 0$

ii) $\{0\}^{\perp} = E$

2) i) $\left(\forall x \in E, \langle a|x\rangle = 0\right) \overset{S!}{\iff} a = 0$

ii) $E^{\perp} = \{0\}$

Prop

Soit $A \subset E$.

$A^{\perp}$ est un sev de E.

Déf

Soient F et G deux sev de E.

F et G sont dits orthogonaux si et ssi tout élément de F est orthogonal à tout élément de G.

Autrement dit

$\left(F \text{ et } G \text{ sont dits orthogonaux}\right) \iff \left(\forall x \in F, \forall y \in G, \langle x|y\rangle = 0\right)$

Prop

Soient F et G deux sev de E.

1) $F \subset G \implies F^{\perp} \supset G^{\perp}$

2) Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) F et G sont orthogonaux.

ii) $F \subset G^{\perp}$

iii) $G \subset F^{\perp}$

3) Famille orthogonale

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ sera un esp préhilbertien réel.

Déf

Un vecteur x de E est unitaire si et ssi $\|x\| = 1$

NB :

1) x unitaire $\Rightarrow x \neq 0$

2) Si $x \neq 0$, alors $\dfrac{x}{\|x\|}$ est unitaire.

Déf

1) Une famille de vecteurs de E est dite famille orthogonale si et ssi ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

2) Une famille de vecteurs de E est dite famille orthonormale si et ssi elle est orthogonale et que tous ses vecteurs sont unitaires.

Prop

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.

1) $\mathcal{F}$ est orthogonale $\Longleftrightarrow \left(\forall i \neq j, \langle x_i | x_j \rangle = 0\right)$

2) $\mathcal{F}$ est orthonormale $\Longleftrightarrow \left(\forall i, j \in [\![1, p]\!], \langle x_i | x_j \rangle = \delta_{ij}\right)$

où $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ est le symbole de Kronecker.

Vocabulaire Une f^{lle} orthonormale est dite aussi orthonormée.

Prop

1) Toute famille orthogonale de vecteurs tous non nuls est libre.

S! 2) Toute famille orthonormale est libre.

Prop

Soient $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p \in \mathbb{R}$.
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. On a :

$$\left\langle \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} y_i e_i \right\rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq p} x_i y_j \langle e_i | e_j \rangle$$

Attention à cette erreur

$$\left\langle \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} y_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i \langle e_i | e_i \rangle$$

C'est en général FAUX !!

Prop

$\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.
Soient $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{p} y_i e_i$ deux vecteurs de E.

1) Si $\mathcal{F}$ est orthogonale, on a :

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i \langle e_i | e_i \rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i \|e_i\|^2$$

2) Si $\mathcal{F}$ est orthonormale, on a :

S! i) $\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i$

ii) $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Vocabulaire

Si une base de E est une famille orthonormale, on dit tout court qu'elle est une base orthonormale (bon).
On l'appelle aussi base orthonormée.

Prop

Soit $B=(e_1,\dots,e_n)$ une bon de E.

$$\boxed{\forall x\in E,\quad x=\sum_{i=1}^{n}\langle x|e_i\rangle e_i}$$

Autrement dit

$$\boxed{\text{Si } x=\sum_{i=1}^{n}x_i e_i \text{ alors } \left(\forall i,\ x_i=\langle x|e_i\rangle\right)}$$

Prop (Théorème de Pythagore)

1) Soient $x,y\in E$, on a :

$$\left(x \text{ et } y \text{ orthogonaux}\right)\Leftrightarrow \|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$$

2) Soit $n\geq 2$.

$$(x_1,\dots,x_n) \text{ famille orthogonale} \Longrightarrow \left\|\sum_{i=1}^{n}x_i\right\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2$$

4) Procédé d'orthonormalisation de Gram_Schmidt

Prop

Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une famille de vecteurs de E. On a :

$$x\in\left(\text{vect}(e_1,\dots,e_p)\right)^{\perp}\Leftrightarrow\left(\forall 1\leq i\leq p,\ \langle x|e_i\rangle=0\right)$$

Prop (Principe d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ une famille libre de E.

A) Il existe une unique famille orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ vérifiant :

$$\boxed{\begin{array}{l} \star \ \forall\, 1 \leq i \leq p,\ \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_i) = \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_i) \\ \star \ \forall\, 1 \leq i \leq p,\ \langle x_i \mid e_i \rangle > 0 \end{array}}$$

B) Cette famille orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ s'obtient par le procédé de Gram-Schmidt suivant : (Procédé à retenir !)

Étape 1 $\quad e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$

Étape 2 $\quad \begin{cases} U_2 = x_2 - \langle x_2 \mid e_1 \rangle e_1 \\ e_2 = \dfrac{U_2}{\|U_2\|} \end{cases}$

Étape 3 $\quad \begin{cases} U_3 = x_3 - \left(\langle x_3 \mid e_1 \rangle e_1 + \langle x_3 \mid e_2 \rangle e_2 \right) \\ e_3 = \dfrac{U_3}{\|U_3\|} \end{cases}$

$\vdots$

Étape p $\quad \begin{cases} U_p = x_p - \left(\langle x_p \mid e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x_p \mid e_{p-1} \rangle e_{p-1} \right) \\ e_p = \dfrac{U_p}{\|U_p\|} \end{cases}$

Corollaire

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E (E étant esp euclid de dim n), Alors la famille $(e_1, \dots, e_n)$, construite via le procédé de Gram-Schmidt, est une bon de E.

Corollaire (Existence d'une bon dans un esp euclidien)

Tout espace euclidien possède au moins une bon.

Corollaire

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ esp préhilbertien réel.

Tout sev de dimension finie de E possède une bon.

Prop

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ esp préhilbertien réel et F sev de dimension finie de E. On a :

$$E = F \oplus F^{\perp}$$

Notation

Soient E un espace préhilbertien et F un sev de E.

$(F^{\perp})^{\perp}$ se notera $F^{\perp\perp}$.

Prop

Soient E un espace euclidien de dim n et F un sev de E. On a :

1) $\dim(F^{\perp}) = n - \dim(F)$

2) $F^{\perp\perp} = F$

Prop

E esp euclidien.

1) Supp que $E = F \oplus F^{\perp}$

Si B_1 bon de F et B_2 bon de $F^{\perp}$

Alors $B_1 \cup B_2$ est une bon de E.

Elle est dite bon adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^{\perp}$

2) En général, supp que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, où les F_i sont deux à deux orthogonaux.

Si $B_1, \dots, B_p$ des bon respectives de $F_1, \dots, F_p$

Alors $\bigcup_{i=1}^{p} B_i$ est une bon de E.

Elle est dite bon adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$

Prop (Théorème de la base orthonormée incomplète)

E esp euclidien de dimension finie $n \geq 1$.

Si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une famille orthonormée de E, alors il existe $\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n \in E$ tels que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n)$ soit une bon de E.

---

5) Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est encore un esp préhilbertien réel.

Déf

Soit F un sev de dim finie de E.

On sait que $E = F \oplus F^{\perp}$.

La projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$ s'appelle la projection orthogonale sur F.

Prop

Soient F un sev de dim finie de E, et $(e_1, \dots, e_p)$ une bon de F.

On a :

$$\forall x \in E, \ P_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x | e_i \rangle e_i$$

où $P_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F.

Prop (Inégalité de Bessel)

Soit F un sev de dim finie de E. On a :

$$\forall x \in E, \; \|P_F(x)\| \leq \|x\|$$

Corollaire

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien.

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E.

Pour tout $x \in E$, la série positive $\sum_{n \geq 0} \langle x, e_n \rangle^2$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

Prop

Soit F un sev de dim finie de E.

Soient $x, a \in E$, on a :

$$P_F(x) = a \iff \begin{cases} a \in F \\ (x-a) \in F^{\perp} \end{cases}$$

6) Distance d'un vecteur à un sev de dimension finie.

$(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est encore un esp préhilbertien réel.

Déf

Soit F un sev de dim finie de E. Soit $x \in E$.

La distance de x à F est :

$$d(x,F) = \inf\left(\{d(x,y) \,/\, y \in F\}\right)$$

Càd

$$d(x,F) = \inf_{y \in F}\left(\|x-y\|\right)$$

Prop

Soit F un sev de dim finie de E. Soit $x \in E$.

1) $d(x,F) = d(x, P_F(x))$ $\left(= \|x - P_F(x)\|\right)$

2) $P_F(x)$ est l'unique vecteur y de F vérifiant $d(x,F) = \|x-y\|$.

3) $d(x,F) = 0 \iff x \in F$

NB

$$d(x,F) = \|x - P_F(x)\| = \inf_{y \in F}\left(\|x-y\|\right) = \min_{y \in F}\left(\|x-y\|\right)$$

Fin