

Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes 2000 - Toutes filières - Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart. Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Mots-clés : fonction hyperbolique réciproque, équation différentielle du premier ordre, équation fonctionnelle, binôme, polynôme complexe, décomposition en éléments simples, algèbre linéaire, noyau, rang, base

Commentaires : Ce problème couvre une bonne part du problème de première année. Il met plutôt l'accent sur les calculs effectifs (résolution d'une équation différentielle, recherche de la racine n-ième d'un complexe, décomposition en éléments simples, calcul de l'inverse d'une matrice, détermination d'une base d'un espace vectoriel...) que sur les questions théoriques.

Analyse

Partie I

1. Remarquons que $e^x + e^{-x} \neq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, et donc $\tanh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée vérifie :

$$\tanh' x = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0.$$

$\tanh$ est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En outre,

$$\begin{aligned} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x &= -1. \\ - \lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x &= 1. \end{aligned}$$

$\tanh$ réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$.

2. Une simple vérification montre que :

$$\tanh' x = 1 - \tanh^2 x.$$

3. Soit $x \in] -1, 1[$. $y = \operatorname{artanh}(-x) \iff \tanh y = -x$. Maintenant, $\tanh$ est impaire, et :

$$\begin{aligned} y = \operatorname{artanh}(-x) &\iff x = \tanh(-y) \\ &\iff -y = \operatorname{artanh}(x). \end{aligned}$$

On a donc $\operatorname{artanh}(-x) = -\operatorname{artanh}(x)$, et donc artanh est impaire. Plus généralement, la démonstration faite ici s'applique à la réciproque de toute fonction impaire.

4. $\tanh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée ne s'annule jamais. artanh est donc dérivable, et si $x \in] -1, 1[$,

$$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{\tanh'(\operatorname{artanh}(x))} = \frac{1}{1 - [\tanh(\operatorname{artanh}(x))]^2} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

5. Nous intégrons cette dernière inégalité, en remarquant que :

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x}.$$

On a donc :

$$\operatorname{artanh}(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x) + \frac{1}{2} \ln(1+x) + Cte.$$

Comme $\tanh 0 = 0$, on a $\operatorname{artanh} 0 = 0$, et

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

6. Nous avons :

$$\begin{aligned} \operatorname{artanh}(x) &= -\frac{1}{2} \ln(1-x) + \frac{1}{2} \ln(1+x) \\ &= -\frac{1}{2} \left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right] + \frac{1}{2} \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right] + o(x^5) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5). \end{aligned}$$

Partie II

7. Résolvons d'abord l'équation homogène (sans second membre) :

$$\begin{aligned} xy' + 3y &= 0 &\iff y' &= \frac{-3y}{x} \\ &&\iff \frac{y'}{y} &= -\frac{3}{x} \\ &&\iff \ln y &= -3 \ln x + Cte \\ &&\iff y &= \frac{C}{x^3}. \end{aligned}$$

Pour résoudre (E), on applique par exemple la méthode de variation de la constante, en posant $y(x) = \frac{C(x)}{x^3}$. On a alors :

$$xy' + 3y = x \frac{C'(x)}{x^3} = \frac{1}{1-x^2}.$$

On en déduit :

$$C'(x) = \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2} - 1,$$

et donc en intégrant :

$$C(x) = \operatorname{artanh} x - x + C.$$

Finalement,

$$y(x) = \frac{\operatorname{artanh} x - x + C}{x^3}.$$

Partie III

8. Si $f(x) = C$, alors $C = \frac{2C}{1+C^2}$. Cette équation devient : $C^3 = C$, dont les solutions sont 0, 1, -1. Les fonctions constantes solutions sont donc les fonctions identiquement égales à 0, 1 ou -1.

9. Si f est solution, faire $x = 0$ dans l'équation fonctionnelle donne $f(0) = \frac{2f(0)}{1+(f(0))^2}$, et donc $f(0) \in \{0, 1, -1\}$.

10. On a $f(x) = \frac{2f(x/2)}{1 + (f(x/2))^2} = \frac{2a}{1 + a^2}$, où $a = f(x/2)$. Maintenant, $(1 - |a|)^2 \geq 0$, et donc $2|a| \leq 1 + a^2$. En particulier, $|f(x)| \leq 1$.
11. C'est presque évident, en multipliant par -1 de chaque côté de l'égalité, et en remarquant que $(-f(x))^2 = (f(x))^2$.
12. On retrouve ses manches, et on calcule!

$$\begin{aligned} \frac{2 \tanh x}{1 + (\tanh x)^2} &= 2 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2} \\ &= \frac{2(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})[(e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2]} \\ &= \tanh(2x). \end{aligned}$$

13. Comme f est dérivable en 0, elle est en particulier continue en 0, et (u_n) converge vers $f(0) = 1$.
14. La relation vérifiée par f se traduit sur la suite par :

$$u_n = \frac{2u_{n+1}}{1 + u_{n+1}^2}. \quad (1)$$

Comme $1 + u_{n+1}^2 > 0$, u_{n+1} est du même signe que u_n , et par récurrence sur n , on en déduit que (u_n) garde un signe constant.

D'autre part,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_{n+1}^3 - u_{n+1}}{1 + u_{n+1}^2}.$$

- Si $u_0 \geq 0$, $u_{n+1} \geq 0$, et comme $u_{n+1} \leq 1$, $u_{n+1} \geq u_{n+1}^3$, la suite est donc décroissante.
 - Si $u_0 \leq 0$, $u_{n+1} \leq 0$, et comme $u_{n+1} \geq -1$, $u_{n+1} \leq u_{n+1}^3$, la suite est donc croissante.
15. Si par exemple $0 \leq u_0 < 1$, alors (u_n) converge vers une limite comprise entre 0 et $u_0 < 1$. C'est absurde car on a prouvé en 13. que (u_n) converge vers 1.
Si $u_0 < 0$, alors (u_n) converge vers une limite négative: c'est tout aussi absurde!
16. Le même raisonnement conduit là-aussi à une contradiction! (seul changement, la distinction suivant $u_0 < 0$ ou $u_0 \geq 0$!).
17. Les seules solutions du problème avec $f(0) = 1$ ou $f(0) = -1$ sont les fonctions constantes.
18. S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ avec $f(x_0) = 1$, on considère $u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$. Alors une récurrence facile s'appuyant sur la formule (??) montre que (u_n) est constante égale à 1. Mais comme en 13., (u_n) converge vers $f(0) = 0$: c'est absurde! De même si $f(x_0) = -1$.
19. Remarquons que :

$$\begin{aligned} \operatorname{artanh}\left(\frac{2y}{1+y^2}\right) &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{2y}{1+y^2}}{1 - \frac{2y}{1+y^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y^2+2y}{1+y^2-2y} \right) \\ &= \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right) \\ &= 2\operatorname{artanh}(y). \end{aligned}$$

De celà, on déduit que :

$$g(2x) = \operatorname{artanh}\left(\frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}\right) = 2\operatorname{artanh}(f(x)) = 2g(x).$$

- 20.** Comme f est dérivable en 0, et que artanh est dérivable en $f(0) = 0$, par composition, g est dérivable en 0.
- 21.** Du fait que $g(0) = 0$, v_n peut encore être vu comme un taux d'accroissement :

$$v_n = \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right) - g(0)}{\frac{x}{2^n} - 0}.$$

Comme g est dérivable en 0, (v_n) converge vers $g'(0)$.

- 22.** Remarquons que

$$v_n = \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} = \frac{g\left(\frac{2x}{2^{n+1}}\right)}{\frac{2x}{2^{n+1}}} = \frac{2g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2\frac{x}{2^{n+1}}} = v_{n+1}.$$

(v_n) est donc une suite constante, et en particulier $v_0 = g'(0)$. De ce fait, pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $g(x) = g'(0)x$, et cette relation est aussi vérifiée pour $x = 0$.

- 23.** Outre les fonctions constantes précédemment évoquées, l'étude faite ici montre que les autres solutions sont les fonctions du type $\operatorname{artanh}(\lambda x)$.

Fin

