

CCP 2016 - Filière MP

Corrigé de l'épreuve Mathématiques I

Nicolas Basbois & Damien Broizat
Institut Stanislas, Cannes - Lycée Jules Ferry

PROBLÈME : Fonction Digamma.

PARTIE PRÉLIMINAIRE

III.1.

- a. Soit $x > 0$. La fonction $h_x : t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$ par produit de fonctions continues, les fonctions exponentielle et puissances étant bien continues sur $]0, +\infty[$.

On a $h_x(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x < 1$ et $t^2 e^{-t}t^{x-1} = t^{x+1}e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée, d'où $h_x(t) = o_{t \rightarrow +\infty}(\frac{1}{t^2})$.

Ainsi, par comparaison de fonctions positives et critère de Riemann en 0 et en $+\infty$, $h_x : t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On peut ainsi définir la fameuse fonction Gamma d'Euler $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$, sur $]0, +\infty[$.

- b. Soit $x > 0$. La fonction h_x définie dans la question précédente est continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$. La positivité de l'intégrale nous donne $\int_0^{+\infty} h_x(t)dt \geq 0$ et la continuité de h_x implique qu'on ne pourrait avoir $\int_0^{+\infty} h_x(t)dt = 0$ que si h_x était identiquement nulle sur $]0, +\infty[$, ce qui n'est pas le cas.

Ainsi $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} h_x(t)dt > 0$, et ce pour tout $x > 0$.

- c. On définit $h : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto h_x(t) = e^{-t}t^{x-1} \end{cases}$.

– Pour tout $t > 0$, $x \mapsto h(x, t)$ est de classe C^1 (et même C^∞ en fait) sur \mathbb{R}_+^* . On a donc l'existence de $\frac{\partial h}{\partial x}$ sur tout $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et, pour tout $t > 0$, la continuité de $x \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ sur \mathbb{R}_+^* .

Notons d'ailleurs qu'on a, pour tout $(x, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \ln(t)e^{-t}t^{x-1}$.

- Pour tout $x > 0$, $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est continue (donc continue par morceaux) sur \mathbb{R}_+^* .
– Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R}_+^* . On a donc $0 < a \leq b$.

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}_+^*, \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \begin{cases} |\ln(t)|e^{-t}t^{a-1} & \text{si } t \leq 1 \\ \ln(t)e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t > 1 \end{cases} .$$

Notons donc φ la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $\varphi(t) = \begin{cases} |\ln(t)|e^{-t}t^{a-1} & \text{si } t \leq 1 \\ \ln(t)e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$. Cette fonction est continue par morceaux (et même continue en fait).

De plus, pour $t > 1$, on a $t^2\varphi(t) = t^{1+b}\ln(t)e^{-t}$, donc $t^2\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée, d'où $\varphi(t) = o_{t \rightarrow +\infty}(\frac{1}{t^2})$. Et, pour $t \in]0, 1]$, on a $t^{1-\frac{a}{2}}\varphi(t) = t^{\frac{a}{2}}|\ln(t)|e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0$ (toujours par croissance comparée, car $a > 0$), donc $\varphi(t) = o_{t \rightarrow 0^+}\left(\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$, avec $1 - \frac{a}{2} <$

1.

Donc φ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On en déduit l'hypothèse de domination sur tous les segments de $]0, +\infty[$.

Cela prouve finalement que Γ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, donc dérivable, avec :

$$\forall x > 0, \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} t^{x-1} dt.$$

III.2. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt - \frac{1}{n}$.

a. Notons $f : \begin{cases} [1, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \frac{1}{t} \end{cases}$. Comme la fonction f est continue (donc continue par morceaux), décroissante et à valeurs positives, un théorème du cours indique que la série $\sum_{n \geq 2} \left(\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right)$ converge, c'est-à-dire que $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

b. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $H_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$.

Pour $n \geq 2$, on a $\sum_{k=2}^n u_k = \int_1^n \frac{dt}{t} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$ par relation de Chasles, d'où

$$\sum_{k=2}^n u_k = \ln(n) + 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 - H_n.$$

Comme la suite $\left(\sum_{k=2}^n u_k \right)_{n \geq 2}$ converge par la question précédente, il s'ensuit que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ converge.

On note dans la suite $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} H_n$, et on définit la fonction Digamma ψ , pour $x \in]0, +\infty[$, par $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

EXPRESSION DE LA FONCTION DIGAMMA À L'AIDE D'UNE SÉRIE

III.3. Pour $x \in]0, +\infty[$ et pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } t \in]0, n] \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}.$$

a. On peut établir l'inégalité souhaitée par simple étude de la fonction $x \mapsto \ln(1-x) + x$ sur $]-\infty, 1[$, ou bien par un argument de convexité : en effet la fonction \ln est notoirement concave sur \mathbb{R}_+^* , donc son graphe est au-dessous de chacune de ses tangentes. Comme la tangente en $x = 1$ a pour équation $y = x - 1$, on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x - 1$. Il vient ensuite, via deux changements de variable successifs : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$, puis $\forall x < 1, \ln(1-x) \leq -x$.

Ensuite, soit $n \geq 1$ (et, normalement, $x > 0$ est déjà fixé aussi dès l'énoncé de la question III.3.). La fonction f_n est positive par définition.

De plus, pour tout $t \in]0, n[$, $f_n(t) = e^{n \ln(1 - \frac{t}{n})} t^{x-1}$, avec $\ln(1 - \frac{t}{n}) \leq -\frac{t}{n}$ par la question précédente, vu qu'on a bien $\frac{t}{n} < 1$ pour $t \in]0, n[$. On en déduit, par croissance de l'exponentielle et produit par une quantité positive : $f_n(t) \leq e^{n \times (-\frac{t}{n})} t^{x-1} = e^{-t} t^{x-1}$. Enfin f_n est nulle sur $[n, +\infty[$, tandis que la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ y est positive, d'où finalement l'encadrement :

$$\forall t > 0, 0 \leq f_n(t) \leq e^{-t} t^{x-1}.$$

b. Comme demandé, on applique le théorème de convergence dominée :

– Pour tout $n \geq 1$, f_n est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+^* .

- Soit $t > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq t$, par exemple $N = \lfloor t \rfloor + 1$. Alors, pour tout $n \geq N$, $t \in]0, n]$, et donc $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$. Or, $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)}$, et $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) = -\frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{n\left(-\frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-t+o(1)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-t}$ par continuité de l'exponentielle. Donc $f_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-t} t^{x-1}$.

- On a ainsi prouvé que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* vers la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$.
– De plus, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $t > 0$, $|f_n(t)| \leq e^{-t} t^{x-1}$ par la question précédente, et on a prouvé dans la première question du problème que la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est (continue bien sûr et) intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Donc, par le théorème de convergence dominée, $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

Comme f_n est nulle sur $[n, +\infty[$, cela donne finalement :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \Gamma(x),$$

et ce raisonnement a bien été mené pour tout $x > 0$.

III.4. Pour tout entier naturel n et tout $x > 0$, on pose $I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$.

- a. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$.

La fonction $\alpha : u \mapsto (1-u)^n u^{x-1}$ est bien définie et continue sur $]0, 1]$.

De plus, $\alpha(u) \underset{u \rightarrow 0^+}{\sim} u^{x-1} = \frac{1}{u^{1-x}}$, avec $1-x < 1$, donc α est intégrable sur $]0, 1]$ par comparaison de fonctions positives et critère de Riemann.

Cela assure la bonne définition de $I_n(x)$.

On définit maintenant sur $]0, 1]$ les fonctions $\alpha_1 : u \mapsto (1-u)^n$ et $\alpha_2 : u \mapsto \frac{u^x}{x}$. Ces fonctions sont de classe C^1 , et on a $\alpha_1(u)\alpha_2(u)$ qui admet une limite finie pour $u \rightarrow 0^+$, en l'occurrence 0. On en déduit, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int_0^1 \alpha_1(u)\alpha_2'(u) du = \alpha_1(1)\alpha_2(1) - \lim_{u \rightarrow 0^+} \alpha_1(u)\alpha_2(u) - \int_0^1 \alpha_1'(u)\alpha_2(u) du \\ &= 0 - 0 + \frac{n}{x} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^x du = \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1). \end{aligned}$$

- b. Soit $x > 0$.

On a $I_0(x) = \int_0^1 u^{x-1} du = \left[\frac{u^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}$.

Soit $n \geq 1$. On a, par une récurrence immédiate,

$$I_n(x) = \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1) = \frac{n}{x} \times \frac{n-1}{x+1} I_{n-2}(x+2) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} I_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

- c. La fonction $t \mapsto \frac{t}{n}$ réalise une bijection strictement croissante et de classe C^1 de $]0, n]$ sur $]0, 1]$. Via le changement de variable $u = \frac{t}{n}$, on obtient donc :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} n du = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du = n^x I_n(x).$$

Le résultat de la question 3.b. se réécrit ainsi : $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x I_n(x)$. Et le calcul de la question précédente permet de conclure :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \times \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)}.$$

Cette relation est appelée *formule de Gauss* (selon l'énoncé, mais n'est-ce pas plutôt la formule d'Euler dans la littérature?).

III.5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$.

L'indication donnée (fallait-il la prouver ?) est immédiate en remarquant qu'on a

$$e^{xH_n} = e^{x \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} e^{-x \ln(n)} = \left(\prod_{k=1}^n e^{\frac{x}{k}} \right) \times \frac{1}{n^x}.$$

Ensuite, d'après la formule de Gauss établie à la question précédente, on a :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\prod_{k=0}^n (x+k)}{n! n^x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n^x} \times \frac{\prod_{k=1}^n (k+x)}{\prod_{k=1}^n k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n^x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right).$$

Grâce à l'indication fournie, on réécrit :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x e^{xH_n} \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right].$$

Or $H_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma$ donc, par continuité de l'exponentielle, $e^{xH_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{x\gamma}$ et, finalement, par produit de limites,

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right].$$

Cette formule est appelée formule de Weierstrass.

III.6.

- a. On note qu'on pourrait répondre directement à la question à l'aide d'un DL d'ordre 2.
Si l'on veut rester dans les clous du sujet, on commence par réécrire la formule précédente :

$$\prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Gamma(x) x e^{\gamma x}}.$$

Par continuité de \ln , on en déduit :

$$\begin{aligned} \ln \left(\prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right] \right) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{\Gamma(x) x e^{\gamma x}} \right), \text{ i. e.} \\ \sum_{k=1}^n \left[\ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} \right] &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(\Gamma(x) x e^{\gamma x}). \end{aligned}$$

En particulier, on a prouvé que la série $\sum_{k \geq 1} \left[\ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} \right]$ converge. Ceci ayant été démontré pour tout $x > 0$, on a établi la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{k \geq 1} g_k$ sur $]0, +\infty[$, où l'on pose $g_k : x \mapsto \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}$.

- b. On note $g = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k$ sur $]0, +\infty[$.

Outre la convergence de $\sum_{k \geq 1} g_k$ vers g établie à la question précédente, on a :

- Les fonctions g_k sont toutes de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $k \geq 1$, pour tout $x > 0$, $g'_k(x) = \frac{1}{k+x} - \frac{1}{k} = -\frac{x}{k(k+x)}$.
Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R}_+^* . On a donc $0 < a \leq b$. Alors pour tout $k \geq 1$ et tout $x \in [a, b]$, $|g'_k(x)| \leq \frac{b}{k^2}$ et, comme $\sum_{k \geq 1} \frac{b}{k^2}$ converge, on a établi la convergence normale, donc uniforme, de $\sum_{k \geq 1} g'_k$ sur $[a, b]$.

On en déduit que g est de classe C^1 , avec : $\forall x > 0$, $g'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} g'_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k} \right)$.

- c. Par la question 6.a., on a, pour tout $x > 0$,

$$g(x) = -\ln(\Gamma(x) x e^{\gamma x}) = -\ln(\Gamma(x)) - \ln(x) - \gamma x.$$

Dérivant cette relation sur \mathbb{R}_+^* , on obtient :

$$g'(x) = -\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{1}{x} - \gamma,$$

c'est-à-dire, vu que $\psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$, $\psi(x) = -g'(x) - \frac{1}{x} - \gamma$.

Comme $-g'(x) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{k+x} + \frac{1}{k} \right)$, on a finalement établi :

$$\forall x > 0, \psi(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right).$$

III.7.

a. Posant $x = 1$ dans la formule précédente, on trouve : $\psi(1) = -1 - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$,

d'où, par télescopage, $\psi(1) = -1 - \gamma + 1 = -\gamma$.

De plus $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{X \rightarrow +\infty} [-e^{-t}]_0^X = \lim_{X \rightarrow +\infty} 1 - e^{-X} = 1$ donc, vu que $\psi(1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$, on obtient $\Gamma'(1) = -\gamma$.

Mais en reprenant l'expression obtenue à la question 1.c., on constate que $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$, d'où finalement :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt = -\gamma.$$

b. D'après la formule de la question 6.c., on a, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \psi(x+1) - \psi(x) &= -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+1} \right) - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+x} \right) \end{aligned}$$

par somme de séries convergentes. Et donc :

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} \right) = \frac{1}{x}.$$

Remarque. On aurait aussi pu procéder ainsi :

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{d}{dx} \left(\ln \left(\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} \right) \right).$$

Or, il est bien connu que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (il suffit d'intégrer par parties), donc

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{d}{dx} (\ln(x)) = \frac{1}{x}.$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\psi(k+1) - \psi(k) = \frac{1}{k}$.

Il s'ensuit, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\psi(n) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{n-1} (\psi(k+1) - \psi(k)) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

c. Soit $x > 0$ fixé. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit $j_k : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{1}{k+y+1} - \frac{1}{k+y+x} \end{cases}$.

Cette notation est discutable : il aurait peut-être été préférable de noter $j_{k,x}$, pour insister sur le fait que l'on travaille à $x > 0$ fixé, et que la convergence uniforme étudiée ici ne

porte que sur la variable y .

On peut réécrire $j_k(y) = \frac{k+y+x-k-y-1}{(k+y+1)(k+y+x)} = \frac{x-1}{(k+y+1)(k+y+x)}$ donc,

$$\forall y > 0, |j_k(y)| \leq \frac{|x-1|}{(k+1)(k+x)}.$$

Comme $\sum_{k \geq 0} \frac{|x-1|}{(k+1)(k+x)}$ est une série convergente, vu que $\frac{|x-1|}{(k+1)(k+x)} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|x-1|}{k^2}$, on a la convergence normale, donc uniforme, de $\sum_{k \geq 0} j_k$ sur $]0, +\infty[$.

Ensuite, reprenant la formule de 6.c., on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\psi(x+n) - \psi(1+n) = -\frac{1}{x+n} + \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+n} \right) - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1+n} \right),$$

et selon le même principe de calcul qu'à la question précédente, on aboutit à :

$$\psi(x+n) - \psi(1+n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+1+n} - \frac{1}{k+x+n} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} j_k(n).$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $j_k(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc, par le théorème de la double limite (qui s'applique ici car la série de fonctions étudiée converge uniformément sur un voisinage de $+\infty$),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\psi(x+n) - \psi(1+n)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} j_k(n) = 0.$$

III.8. Par analyse-synthèse :

– **Analyse** : Soit f solution. On va montrer que f vérifie la formule de ψ établie en 6.c., à savoir :

$$\forall x > 0, f(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$$

Puisque $\frac{1}{t} = f(t+1) - f(t)$ pour tout $t > 0$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} (f(k+1) - f(k) - f(k+x+1) + f(k+x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n (f(k+1) - f(k)) + \sum_{k=1}^n (f(k+x) - f(k+x+1)) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(f(n+1) - \underbrace{f(1)}_{=-\gamma} + f(1+x) - f(n+x+1) \right) \\ &= f(x+1) + \gamma - \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x+1+n) - f(1+n))}_{=0} = f(x) + \frac{1}{x} + \gamma, \end{aligned}$$

ce qui montre bien la relation voulue, et donc $f = \psi$.

– **Synthèse** : La seule solution éventuelle au problème est donc ψ . Mais on a prouvé en 7.a., 7.b. et 7.c. que ψ satisfait les trois conditions voulues, donc finalement ψ est solution, et c'est la seule.

Fin

