# Correction

d'après ENGEES PC 1999

*Partie I*

1.a $\forall P\in\mathbb{R}_n[X]$, $\deg(X^2-1)P\le n+2$ et donc $\deg(\varphi(P))\le n$ d'où $\varphi(P)\in\mathbb{R}_n[X]$. Ainsi $\varphi:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X]$. La linéarité de $f$ ne posant aucun problème majeur, on conclut $\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

1.b $\forall k\in\{0,1,\dots,n\},\varphi(X^k)=(X^{k+2}-X^k)''=(k+2)(k+1)X^k-k(k-1)X^{k-2}$.

Par suite $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)=\begin{pmatrix}1\times2 & 0 & -1\times2 & & 0\\ & 2\times3 & 0 & \ddots & \\ & & 3\times4 & \ddots & -n(n-1)\\ & & & \ddots & 0\\ 0 & & & & (n+1)(n+2)\end{pmatrix}$.

2.a (i) $\Rightarrow$ (ii) Si l'équation $\varphi(P)=\lambda.P$ possède un polynôme unitaire solution, celui-ci est élément de $\ker(\varphi-\lambda.I)$ et donc $\ker(\varphi-\lambda.I)\neq\{0\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si $\ker(\varphi-\lambda.I)\neq\{0\}$ alors $\varphi-\lambda.I$ n'est pas un automorphisme et donc $\det(\varphi-\lambda I)=0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Si $\det(\varphi-\lambda I)=0$ alors $\varphi-\lambda.I$ n'est pas un automorphisme, il n'est donc pas injectif et par suite $\ker(\varphi-\lambda.I)\neq\{0\}$. Soit $P\in\ker(\varphi-\lambda.I)$ non nul. En divisant $P$ par son coefficient dominant, on obtient un polynôme unitaire solution de l'équation $\varphi(P)=\lambda P$.

2.b Existence : $\det(\varphi-(k+1)(k+2)I)=0$ (déterminant triangulaire avec un zéro sur la diagonale).
En vertu de 2.a, l'équation $\varphi(P)=(k+1)(k+2)P$ possède un polynôme unitaire solution.
Degré : Notons $p$ le degré d'un polynôme unitaire solution de l'équation $\varphi(P)=(k+1)(k+2)P$.
Le coefficient dominant de $\varphi(P)$ étant $(p+1)(p+2)$ et celui de $(k+1)(k+2)P$ étant $(k+1)(k+2)$, on a $(p+1)(p+2)=(k+1)(k+2)$ ce qui donne $(p-k)(p+k+3)=0$ d'où $p=k$
Unicité : Soit $P$ et $Q$ deux solutions du problème posé. $P$ et $Q$ sont tous deux unitaires de degré $k$ donc $P-Q$ est de degré strictement inférieur à $k$. De plus $P-Q$ est solution de l'équation proposée.
Si $P-Q\neq0$ alors on parvient à construire une solution unitaire de l'équation étudiée, solution qui est de degré strictement inférieur à $k$. C'est exclu et donc $P=Q$.

2.c La famille $(P_0,...,P_n)$ est une famille de polynômes de degrés étagés.

3.a Pour $k=0$, $P_0$ est unitaire de degré $0$ donc $P_0=1$.
Pour $k=1$, on cherche $P_1$ unitaire de degré 1 tel que $((X^2-1)P)''=6P$. $P_1=X$ convient.

3.b $P_k=X^k+\alpha X^{k-1}+\beta X^{k-2}+Q$ avec $\deg Q<k-2$.

$$\begin{aligned}((X^2-1)P_k)''&=(X^{k+2}+\alpha X^{k+1}+(\beta-1)X^k+\hat{Q})''\\&=(k+2)(k+1)X^k+\alpha k(k+1)(\beta-1)k(k-1)X^{k-2}+\hat{Q}''\end{aligned}$$

avec $\deg\hat{Q}<k$. En identifiant avec $(k+1)(k+2)P_k$ on obtient $\alpha k(k+1)=\alpha(k+1)(k+2)$ donc $\alpha=0$ et $(\beta-1)k(k-1)=\beta(k+1)(k+2)$ ce qui donne $\beta=-\dfrac{k(k-1)}{4k+2}$.

*Partie II*

1.a $\psi:E\times E\to\mathbb{R}$. Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{R},f,g,h\in E$, on a $\psi(\lambda f+\mu g,h)=\lambda\psi(f,h)+\mu\psi(g,h)$, $\psi(g,f)=\psi(g,f)$, $\psi(f,f)=\int_{-1}^{1}f(t)^2(1-t^2)dt\ge0$ car intégrale d'une fonction positive.

Supposons $\psi(f,f)=\int_{-1}^{1}f(t)^2(1-t^2)dt=0$. Puisque $t\mapsto(f(t))^2(1-t^2)$ est continue et positive sur

$[-1,1]$, on a $\forall t\in[-1,1],(f(t))^2(1-t^2)=0$ d'où $\forall t\in]-1,1[,f(t)=0$ puis, puisque $f$ est continue, $\forall t\in[-1,1],f(t)=0$ i.e. $f=0$. Finalement $\psi$ est un produit scalaire.

1.b $(XP\mid Q)=\int_{-1}^{1}tP(t)Q(t)(1-t^2)dt$ et $(P\mid XQ)=\int_{-1}^{1}P(t)tQ(t)(1-t^2)dt$ donc $(XP\mid Q)=(P\mid XQ)$.

2.a A l'aide de deux ipp :

$$\begin{aligned}(\phi(f)\mid g)&=\int_{-1}^{1}((x^2-1)f(x))''g(x)(1-x^2)dx\\&=\left[((x^2-1)f(x))'g(x)(1-x^2)\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}((x^2-1)f(x))'(g(x)(x^2-1))'dx\\&=\left[(x^2-1)f(x)(g(x)(1-x^2))'\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}(1-x^2)f(x)(g(x)(x^2-1))''dx=(f\mid\phi(g))\end{aligned}$$

2.b $(\phi(P_k)\mid P_\ell)=(k+1)(k+2)(P_k\mid P_\ell)$ et $(\phi(P_k)\mid P_\ell)=(P_k\mid\phi(P_\ell))=(\ell+1)(\ell+2)(P_k\mid P_\ell)$

Puisque $k\neq\ell$ on a $(k+1)(k+2)\neq(\ell+1)(\ell+2)$ et donc $(P_k\mid P_\ell)=0$.

2.c Si $\deg Q<k$ alors (via I.2.c) $Q$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des polynômes $P_0,\dots,P_{k-1}$ et puisque chacun est orthogonal à $P_k$, $Q$ l'est aussi.

3.a $P_k$ et $XP_{k-1}$ sont unitaires et de degré $k$ donc $\deg(P_k-XP_{k-1})\leq k-1$.

Pour $\ell\in\{0,\dots,k-3\}$, $(P_k-XP_{k-1}\mid P_\ell)=(P_k\mid P_\ell)-(P_{k-1}\mid XP_\ell)$

Or $(P_k\mid P_\ell)=0$ car $k\neq\ell$ et $(P_{k-1}\mid XP_\ell)=0$ car $\deg(XP_\ell)=\ell+1<k-1$.

donc $(P_k-XP_{k-1}\mid P_\ell)=0$

3.b Puisque $\deg(P_k-XP_{k-1})\leq k-1$, on peut (via I.2c) écrire : $P_k-XP_{k-1}=\lambda_0P_0+\dots+\lambda_{k-1}P_{k-1}$.

Pour tout $\ell\in\{0,\dots,k-3\}$ : $(P_k-XP_{k-1}\mid P_\ell)=\lambda_\ell(P_\ell\mid P_\ell)=0$ donc $\lambda_\ell=0$

Par suite, il reste $P_k-XP_{k-1}=\lambda_{k-2}P_{k-2}+\lambda_{k-1}P_{k-1}$.

3.c En identifiant les coefficients de $X^{k-1}$ et $X^{k-2}$ dans le deux expressions on obtient respectivement : $0=\lambda_{k-1}$ et $-\frac{k(k-1)}{4k+2}+\frac{(k-1)(k-2)}{4k-2}=\lambda_{k-2}$ i.e. $\lambda_{k-2}=-\frac{(k-1)(k+1)}{(2k-1)(2k+1)}$.

3.d $P_0=1,P_1=X$, $P_2=XP_1-\frac{3}{15}P_0=X^2-\frac{1}{5}$, $P_3=XP_2-\frac{8}{35}P_1=X^3-\frac{3}{7}X$.

4.a $P_k=X^k+Q$ avec $\deg Q<k$ donc $(P_k\mid P_k)=(P_k\mid X^k)$ car $(P_k\mid Q)=0$.

4.b $(\varphi(P_\ell)\mid X^{\ell+2})=(\ell+1)(\ell+2)(P_\ell\mid X^{\ell+2})$ et

$(\varphi(P_\ell)\mid X^{\ell+2})=(P_\ell\mid\varphi(X^{\ell+2}))$ avec $\varphi(X^{\ell+2})=(\ell+3)(\ell+4)X^{\ell+2}-(\ell+2)(\ell+1)X^\ell$

On parvient à $(P_\ell\mid X^{\ell+2})=\frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2(2\ell+5)}(P_\ell\mid P_\ell)$

4.c $(P_k\mid P_k)=(P_k\mid X^k)=(XP_{k-1}\mid X^k)+\frac{(k-1)(k+1)}{(2k-1)(2k+1)}(P_{k-2}\mid X_k)$

or $(XP_{k-1}\mid X^k)=(P_{k-1}\mid X^{k+1})$ et par le résultat précédent

$(P_k\mid P_k)=\frac{k(k+1)}{2(2k+3)}(P_{k-1}\mid P_{k-1})+\frac{(k-1)^2k(k+1)}{2(2k-1)(2k+1)^2}(P_{k-2}\mid P_{k-2})$ (sauf erreur…)