CCP Maths 1 PC 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Florence Monna (Doctorante) ; il a été relu par Arnaud Borde (École Polytechnique) et Gilbert Monna (Professeur en CPGE).

Le sujet porte sur la notion de vecteur propre commun à un couple de matrices (A, B) dans plusieurs situations. L'épreuve se divise en quatre parties très largement indépendantes. Elles font toutes appel à l'algèbre linéaire, plus particulièrement aux matrices. Ce sujet peut donc être utilisé dès que cette partie du programme a été traitée. Les parties I et III sont des cas particuliers, et sont donc plus faciles à aborder.

- La première partie est consacrée à l'étude d'un exemple réel en dimension 3. Elle est très calculatoire mais ne présente pas de difficulté majeure. On y aborde les notions de spectre, de polynôme caractéristique et de diagonalisabilité.
- La deuxième partie, plus théorique, se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, avec $n \in \mathbb{N}$. On y établit une condition nécessaire et deux conditions suffisantes pour que deux matrices A et B aient un vecteur propre commun. Ces conditions portent sur le rang de $\mathrm{AB} - \mathrm{BA}$ ainsi que sur les valeurs propres des matrices.
- La troisième partie se réduit à l'étude d'un autre cas particulier, cette fois-ci dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$. Il permet en fin de partie de montrer que la condition nécessaire de la partie II n'est pas une condition suffisante, tout comme les conditions suffisantes de cette même partie ne sont pas nécessaires pour que deux matrices aient un vecteur propre commun.
- La quatrième partie aborde de nouveau le cas général, et se focalise sur un type particulier de vecteur propre, dit sous forme normale ; on cherche sous quelles conditions une matrice A admet un vecteur propre sous cette forme normale. Cette partie sert de conclusion et fait davantage appel aux résultats des parties précédentes que le reste du sujet.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Indications

Partie I

I.2.b Appliquer le théorème du rang.

I.2.c Utiliser les questions I.2.a et I.2.b pour conclure.

I.3.b Énumérer les cas possibles puis se servir des questions I.1.b et I.1.d pour en éliminer.

I.4.b Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C et montrer qu'elle est diagonalisable.

Partie II

II.1.b Se servir de la question II.1.a et utiliser le théorème du rang pour conclure.

II.2 Pour justifier l'existence d'une valeur propre au moins, penser que l'on se place sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

II.3.a Utiliser l'hypothèse $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ pour montrer que ψ est à valeurs dans $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$.

II.3.b La restriction de ψ à E_λ définit un endomorphisme de $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$ et on a toujours un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

II.4 Penser que les seuls endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension 1 sont les homothéties.

II.5.b Remarquer que $\mathrm{C}u$ est un élément de l'image de $\mathbb{C}$, puis utiliser la dimension de l'image de $\mathbb{C}$.

II.5.d Utiliser la question II.5.c pour démontrer la première inégalité.

II.5.f Se servir du résultat de la question II.5.d ainsi que du fait que $\mathcal{P}_k$ est supposée vérifiée pour tout entier $k \in [\![1\,; n-1]\!]$.

II.6 Procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ en utilisant le résultat de la question II.4 pour l'initialisation. Distinguer ensuite deux cas, utiliser les résultats des questions II.2 et II.3.b pour l'un, et les résultats de la question II.5 pour l'autre.

Partie III

III.2 Faire appel au résultat de la question III.1 pour la nature de g.

III.3.a Procéder à un raisonnement par l'absurde.

III.4.a Démontrer une inclusion, puis l'autre.

III.5 Se servir des résultats des questions III.3 et III.4.

Partie IV

IV.1 Utiliser deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à la même valeur propre pour construire un vecteur propre sous forme normale.

IV.2 Observer les coefficients diagonaux de la matrice.

IV.3.b Utiliser les propriétés démontrées à la question IV.3.a.

IV.3.c Se servir de la propriété i) de la question IV.3.a ainsi que du résultat démontré à la question IV.2.c.

IV.4.b Effectuer une combinaison linéaire des égalités de la question précédente.

IV.4.d Raisonner de la même manière qu'à la question IV.3.c.

IV.4.e Utiliser la même démarche qu'à la question IV.3.d.

IV.4.g Se rapporter au cas de la question IV.4.d à l'aide de la question IV.4.f.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

I. Étude dans un cas particulier

I.1.a Afin de déterminer le spectre de A, il convient de déterminer le polynôme caractéristique de A, que l'on note χ_{A}. Celui-ci s'écrit, pour $\mathrm{X} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$,

$$\begin{aligned}\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) &= \det(\mathrm{A} - \mathrm{X}\mathrm{I}_3)\\ &= \begin{vmatrix} -\mathrm{X} & -1 & -1 \\ -1 & -\mathrm{X} & -1 \\ -1 & -1 & -\mathrm{X} \end{vmatrix}\\ \chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) &= -\mathrm{X}(\mathrm{X}^2 - 1) + \mathrm{X} - 1 - (1 - \mathrm{X})\end{aligned}$$

en développant par rapport à la première colonne, ce qui donne

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - 1)(-\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 2)$$

Le polynôme $-\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 2$ possède deux racines simples, 1 et -2, d'où l'expression du polynôme caractéristique

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = -(\mathrm{X} - 1)^2(\mathrm{X} + 2)$$

ce qui permet de déterminer le spectre de la matrice A :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{1, -2\}}$$

I.1.b Pour répondre à cette question, il faut dans un premier temps vérifier que les vecteurs $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ et $\mathbf{u_3}$ sont des vecteurs propres de A, puis démontrer que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Examinons tout d'abord les vecteurs de $\mathcal{F}$

$$\mathrm{A}\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{u_1}$$

$$\mathrm{A}\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{u_2}$$

$$\mathrm{A}\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\mathbf{u_3}$$

On en conclut que $\mathbf{u_1}$ et $\mathbf{u_2}$ sont des vecteurs propres de A associés à la valeur propre 1, et que $\mathbf{u_3}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -2.

De plus, on constate que $\mathbf{u_1}$ et $\mathbf{u_2}$ sont linéairement indépendants, puisque le déterminant d'ordre 2 formé des deux premières lignes de la matrice $(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2})$ est non nul. Par conséquent, la famille $(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2})$ est libre dans son sous-espace propre associé, tout comme la famille $(\mathbf{u_3})$. De plus, des sous-espaces propres associés à des valeurs propres différentes sont en somme directe. On en déduit que la famille $\mathcal{F}$ est libre, et comme $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est de dimension 3,

$$\boxed{\mathcal{F} \text{ est une base de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \text{ constituée de vecteurs propres de A.}}$$

I.1.c On vient de déterminer une base de $\mathbb{K}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ce qui permet de dire que

$$\boxed{\text{A est diagonalisable.}}$$

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

I.1.d Considérons les vecteurs B$\mathbf{u_1}$, B$\mathbf{u_2}$ et B$\mathbf{u_3}$

$$\mathrm{B}\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B}\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B}\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs B$\mathbf{u_1}$ et $\mathbf{u_1}$ sont linéairement indépendants, puisque le déterminant d'ordre 2 formé par les deux premières lignes de la matrice $(\mathrm{B}\mathbf{u_1}, \mathbf{u_1})$ est non nul, et on vérifie de la même manière que les vecteurs B$\mathbf{u_2}$ et $\mathbf{u_2}$ sont linéairement indépendants, tout comme les vecteurs B$\mathbf{u_3}$ et $\mathbf{u_3}$, ce qui veut dire que

$$\boxed{\text{Aucun des éléments de } \mathcal{F} \text{ n'est un vecteur propre commun à A et B.}}$$

I.2.a Pour déterminer le spectre de B, on calcule le polynôme caractéristique de B, noté χ_B. Celui-ci s'écrit

$$\begin{aligned} \chi_\mathrm{B}(\mathrm{X}) &= \det(\mathrm{B} - \mathrm{X}\mathrm{I}_3) \\ &= \begin{vmatrix} 3-\mathrm{X} & -3 & -1 \\ 0 & 2-\mathrm{X} & 0 \\ 1 & -3 & 1-\mathrm{X} \end{vmatrix} \\ \chi_\mathrm{B}(\mathrm{X}) &= (2-\mathrm{X})\left((3-\mathrm{X})(1-\mathrm{X})+1\right) \end{aligned}$$

en développant par rapport à la deuxième ligne, ce qui donne

$$\chi_\mathrm{B}(\mathrm{X}) = -(\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X} + 4)$$

Le polynôme $\mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X} + 4$ possède une racine double égale à 2, d'où l'expression du polynôme caractéristique :

$$\chi_\mathrm{B}(\mathrm{X}) = -(\mathrm{X}-2)^3$$

ce qui permet de déterminer le spectre de la matrice B.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\mathrm{B}) = \{2\}}$$

I.2.b On cherche à déterminer les éléments de $\mathrm{Im}_2(\mathrm{B}) = \mathrm{Im}\,(\mathrm{B} - 2\mathrm{I}_3)$, qui est le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice

$$\mathrm{B} - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

toutes colinéaires au vecteur $\mathbf{u_4} = {}^t\,(1,0,1)$. On en déduit

$$\boxed{\mathrm{Im}_2(\mathrm{B}) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u_4})}$$

La dimension de l'image de l'endomorphisme associé à la matrice $\mathrm{B} - 2\mathrm{I}_3$ valant 1, le théorème du rang permet d'écrire que la dimension du noyau de cet endomorphisme vaut 2, d'où

$$\boxed{\dim\left(\mathrm{E}_2(\mathrm{B})\right) = 2}$$

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .