

# Concours National commun - Session 2014-MP

## Mathématiques I

### Extrait

#### Exercice

On considère la fonction de deux variables  $F : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$F(1, 1) = 0 \text{ et } F(x, y) = \frac{xy(1-x)(1-y)}{(1-xy)} \text{ si } (x, y) \neq (1, 1)$$

1. Montrer que, pour tout  $(x, y) \in [0, 1]^2$ ,  $(1-x)(1-y) \leq (1 - \sqrt{xy})^2$
2. Montrer  $F$  est continue sur  $[0, 1]^2$ .
3. En déduire que  $F$  est bornée sur  $[0, 1]^2$  et atteint ses bornes.
4. Déterminer la borne inférieure de  $F$  sur  $[0, 1]^2$ , en quels points de  $[0, 1]^2$  cette borne est-elle atteinte ?
5. Justifier que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'ouvert  $]0, 1[^2$  et calculer ses dérivées partielles premières.
6. Montrer que  $F$  admet un unique point critique  $(x_o, y_o)$  dans l'ouvert  $]0, 1[^2$  et le préciser.
7. Calculer  $F(x_o, y_o)$  et justifier que  $F(x_o, y_o) = \sup_{(x,y) \in [0,1]^2} F(x, y)$ .

Fin extract