

EXTRAIT POUR
les premières années



ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Notations

- Dans tout le sujet, n est un entier naturel fixé non nul.
- Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ est un espace probabilisé fini.
- On note $L^0(\Omega)$ le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des variables aléatoires réelles définies sur Ω . On notera que si $X \in L^0(\Omega)$, $X(\Omega)$ est une partie finie de $\mathbf{R}$. On confondra systématiquement variable aléatoire nulle et variable aléatoire presque sûrement nulle.
- Si $X \in L^0(\Omega)$, on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance.
- Une variable aléatoire $X \in L^0(\Omega)$ suit une loi de Rademacher si :

$$X(\Omega) = \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = -1) = \frac{1}{2}.$$

Inégalité de Hölder

Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $X, Y \in L^0(\Omega)$ que l'on suppose toutes les deux positives.

1 ▷ Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}_+, \quad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

2 ▷ En déduire l'inégalité suivante (inégalité de Hölder) :

$$\mathbf{E}(XY) \leq (\mathbf{E}(X^p))^{1/p} (\mathbf{E}(Y^q))^{1/q}.$$

On pourra commencer par traiter le cas où $\mathbf{E}(X^p) = \mathbf{E}(Y^q) = 1$.

Une inégalité de déviation

Soit $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher.

3 ▷ On admet que :

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \end{array} \right\} \leftarrow \begin{array}{l} \text{J'ai ajouté ça pour} \\ \text{rendre la question faisable} \\ \text{pour les premières années} \end{array}$$

Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \operatorname{ch}(t) \leq e^{t^2/2}.$$

4 ▷ Montrer que : pour tout $t \geq 0$, pour tout $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\mathbf{E} \left(\exp \left(t \sum_{i=1}^n c_i X_i \right) \right) \leq \exp \left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2 \right).$$

5 ▷ En déduire que : pour tout $t \geq 0$, pour tout $x \geq 0$ et pour tout $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\mathbf{P} \left(\exp \left(x \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| \right) > e^{tx} \right) \leq 2 e^{-tx} \exp \left(\frac{x^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2} \right).$$

On pourra utiliser l'inégalité de Markov.

6 ▷ Montrer que : pour tout $t \geq 0$ et pour tout $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ non nul,

$$\mathbf{P} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| > t \right) \leq 2 \exp \left(-\frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2} \right).$$

Inégalités de Khintchine

Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher. Soit $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$.

7 ▷ Soit X une variable aléatoire réelle positive et finie. Soit F_X la fonction définie pour tout $t \geq 0$, par

$$F_X(t) = \mathbf{P}(X > t).$$

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t) dt$ converge, puis que

$$\mathbf{E}(X^p) = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t) dt.$$

8 ▷ On suppose dans cette question que $\sum_{i=1}^n c_i^2 = 1$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t^2/2} dt$ converge, puis que

$$\mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^4 \right) \leq 8 \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t^2/2} dt.$$

9 ▷ Montrer que

$$\mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right) = \sum_{i=1}^n c_i^2.$$

Dans les questions numérotées de 10 ▷ à 11 ▷, on suppose $1 \leq p < 2$.

10 ▷ Justifier qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{2} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4}$.

11 ▷ Montrer que

$$\mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right) \leq \mathbf{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^p \right)^{2\theta/p} \mathbf{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^4 \right)^{(1-\theta)/2}.$$

Fin