Définitions et notations : Dans tout ce problème, E est un $\mathbb{K}-ev$ de dimension $n \geq 1$. L'application identité de E sera notée Id, l'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'espace vetoriel des matrices carrées de taille n. La trace d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, est la somme des coefficients diagonaux de A.On la note $Tr(A)$.
Pour tout endomorphisme f de E, on notera $f^0 = Id$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{k+1} = f^k \circ f = f \circ f^k$. On notera aussi $Ker(f)$ le noyau de f, $Im(f)$ l'image de f.
Un sous espace F de E est dit stable par f si pour tout $x \in E$, on a $f(x) \in F$.

Partie I : Préliminaire

1. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) Vérifier que $Tr(AB) = Tr(BA)$.
   (b) Déduire que si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $Tr(A) = Tr(B)$.
   Notons alors que pour tout endomorphisme f de E, la trace d'une matrice A de f ne dépend pas de la base choisie; on définit ainsi la trace de f par $Tr(f) = Tr(A)$.
2. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$, tels que g est bijectif, et $\alpha \in \mathbb{K}^*$. Montrer que l'égalité $f + \alpha g = g^{-1} \circ f \circ g$ est impossible. (On pourra utiliser la trace).
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Vérifier que $Ker(u^k) \subset Ker(u^{k+1})$.
   (b) Montrer que si $Ker(u^k) = Ker(u^{k+1})$ alors $Ker(u^k) = Ker(u^{k+p})$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   (c) Déduire que si $Ker(u^{k+1}) \neq Ker(u^{k+2})$ alors $Ker(u^k) \neq Ker(u^{k+1})$.
   (d) Montrer que si $Ker(u^k) \neq Ker(u^{k+1})$ alors $dim(Ker(u^{k+1})) \geq k + 1$.
   (e) Déduire que $Ker(u^n) = Ker(u^{n+1})$ et que $E = Ker(u^n) \oplus Im(u^n)$.

Dans la suite du problème, on dit qu'un couple (u, v) d'endomorphismes de E vérifie la propriété (P) si : $u \circ v - v \circ u = u$.

Partie II : Étude d'un exemple

Dans cette partie $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E, et u l'endomorphisme de E dont la matrice canoniquement associée est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer (en justifiant!) le rang de u et une base de chacun des sous espaces $Im(u)$ et $Ker(u)$.
2. Calculer A^k pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), u^2(e_1))$ est une base de E. Donner la matrice de u dans cette base.
4. Soit v un endomorphisme de E.
   (a) Justifier l'existence de trois réels a_0, a_1, a_2 tels que $v(e_1) = a_0 e_1 + a_1 u(e_1) + a_2 u^2(e_1)$.
   (b) Montrer que le couple (u, v) vérifie la propriété (P) si, et seulement si, la matrice de v dans $\mathcal{B}$ est :
   $$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 - 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 - 2 \end{pmatrix}$$
   (c) Soit v_0 l'endomorphisme dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $D = diag(0, -1, -2)$.
   Vérifier que le couple (u, v_0) vérifie la propriété (P).
   (d) Montrer que (u, v) vérifie la propriété (P) si, et seulement si, $v - v_0 \in Vect(Id, u, u^2)$.

Partie III : Cas général

Notons $C_u = \{v \in \mathcal{L}(E) \ / \ u \circ v = v \circ u\}$ et $P_u = \{v \in \mathcal{L}(E) \ / \ (u, v) \text{vérifie la propriété} (P)\}$.

On suppose désormais que P_u est non vide.

1. Soit $v \in P_u$.
   (a) Montrer que u n'est pas bijectif et que sa trace est nulle.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $u^k \circ v - v \circ u^k = k u^k$

   On admet que $u^n = 0$ et on suppose dans toute la suite que $dim(Ker(u)) = 1$.

2. Montrer que pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$ $dim(Ker(u^k)) = k$.
   (Indication : Penser à la restriction de u sur $Im(u^k)$)

3. Justifier l'existence d'un vecteur $e \notin Ker(u^{n-1})$, et montrer que $\mathcal{B}_e = (e, u(e), \cdots, u^{n-1}(e))$ est une base de E. Donner la matrice de u dans $\mathcal{B}_e$

4. Soit w un endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}_e$ est de la forme $D = diag(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1})$.

   Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $w \in P_u$.

   Soit w_0 celui des endomorphismes ci dessus relatif à la condition $\alpha_0 = 0$.

5. On suppose maintenant que $w \in C_u$.

   (a) Vérifier que $Im(w)$ et $Ker(w)$ sont stables par u.

   (b) Montrer que $w \in C_{u^k}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   (c) Justifier qu'il existe n scalaires $a_0, \cdots, a_{n-1}$ tels que $w(e) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(e)$.

   Déterminer alors les images par w des éléments de la base $\mathcal{B}_e$.

   (d) En déduire que $C_u = Vect(Id, u, \cdots, u^{n-1})$.

   (e) Décrire les éléments de P_u en fonction de w_0 et des éléments de C_u.