Calcul algébrique

Résumé Lacunaire

Les nombres qu'on étudiera sont des complexes.

I) Le symbole somme $\sum$

Cas général

Soient p et n deux entiers naturels tels que $p \leq n$.

$$x_p + x_{p+1} + \cdots + x_n = \sum_{k=\text{[redacted]}} x_k$$

Cas particulier

$$\sum_{k=\text{[redacted]}} x_k = x_p$$

Convention

Si $p > n$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} x_k =$ [redacted]

Propriétés immédiates

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) =$ [redacted]

b) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda x_k =$ [redacted]

c) $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2,\ \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k+\mu y_k) =$ [redacted]

2) Soit $\lambda\in\mathbb{C}$. On a

a) $\sum_{k=1}^{n} \lambda =$ [redacted]

b) $\sum_{k=p}^{n} \lambda =$ [redacted]

où $p\leq n$.

Somme téléscopique

Prop (Simplification téléscopique)

Supposons que $1\leq p\leq n$.

1) $\sum_{k=1}^{n} (x_{k+1}-x_k) = x$ [redacted]

2) $\sum_{k=p}^{n} (x_{k+1}-x_k) = x$ [redacted]

3) $\sum_{k=1}^{n} (x_k-x_{k-1}) = x$ [redacted]

4) $\sum_{k=p}^{n} (x_k-x_{k-1}) = x$ [redacted]

II) Le symbole produit $\prod$

Cas général

Soient p et n deux entiers naturels tels que $p \leq n$.

$$x_p \times x_{p+1} \times \dots \times x_n = \prod_{k=\text{[redacted]}} x_k$$

Cas particulier

$$\prod_{k=\text{[redacted]}} x_k = x_p$$

Convention

Si $p > n$, $\prod_{k=p}^{n} x_k =$ [redacted]

Propriétés immédiates

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) $\prod_{k=1}^{n} (x_k y_k) =$ [redacted]

2) $\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{y_k}\right) =$ [redacted]

où ($y_k \neq 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$).

3) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :

i) $\prod_{k=1}^{n} \lambda =$ [redacted]

ii) $\prod_{k=p}^{n} \lambda = $ [redacted] où $p \leq n$.

4) i) $\prod_{k=1}^{n} (\lambda x_k) = $ [redacted]

ii) $\prod_{k=p}^{n} (\lambda x_k) = $ [redacted]

où $p \leq n$.

5) i) $\prod_{k=1}^{n} x_k = 0 \iff ($ [redacted] $)$

ii) $\prod_{k=1}^{n} x_k \neq 0 \iff ($ [redacted] $)$

Prop

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n \in]0, +\infty[$. On a :

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \text{[redacted]}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. On a :

$$e^{\sum_{k=1}^{n} x_k} = \text{[redacted]}$$

Prop

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\prod_{k=1}^{n} k = $ [redacted]

2) i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \dots + n = $ [redacted]

ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 =$ [redacted]

iii) $\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + \dots + n^3 =$ [redacted]

Prop (Produit téléscopique)

Supp que $p \leq n$.

1) $\prod_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} =$ [redacted]

2) $\prod_{k=p}^{n} \frac{x_{k-1}}{x_k} =$ [redacted]

« les x_k étant non nuls »

Prop

1) Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $(\forall 1 \leq i \leq n, \ x_i \leq y_i)$ alors $\sum_{i=1}^{n} x_i$ [redacted]

2) Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$[redacted] et $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $(\forall 1 \leq i \leq n, \ x_i \leq y_i)$ alors $\prod_{i=1}^{n} x_i$ [redacted]

III) Coéfficients binomiaux

1) Factorielle

Déf

Soit $n \in \mathbb{N}$.

[redacted] $= \prod_{k=1}^{n} k$

NB $0! =$ [redacted]

2) Coéfficients binomiaux

Déf 1

Soient $k, n \in \mathbb{N}$.

1) Si $k \leq n$, $C_n^k =$ [redacted]

2) Si $k > n$, $C_n^k =$ [redacted]

Prop 2

Soient $k, n \in \mathbb{N}$.

1) $C_n^0 =$ [redacted], $C_n^n =$ [redacted]

2) $C_n^1 =$ [redacted]

3) $C_n^2 =$ [redacted]

4) C_n^k [redacted] C_n^{n-k}, où $k \leq n$.

Prop 3 (Formule de Pascal)

Soient $k, n \in \mathbb{N}$, avec $k < n$. On a :

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C \text{ [redacted]}$$

3) Triangle de Pascal

$n = 0$ $\quad C_0^0$

$n = 1$ $\quad C_1$ [redacted] C_1

$n = 2$ $\quad C_2$ [redacted] C_2 [redacted] C_2

$n = 3$ $\quad C_3$ [redacted] C_3 [redacted] C_3 [redacted] C_3

$n = 4$ $\quad C_4$ [redacted] C_4 [redacted] C_4 [redacted] C_4 [redacted] C_4

$n = 5$ $\quad C_5$ [redacted] C_5 [redacted] C_5 [redacted] C_5 [redacted] C_5 [redacted] C_5

$\vdots$

$n=0$ 1

$n=1$ 1 1

$n=2$ 1 [redacted] 1

$n=3$ 1 [redacted] 1

$n=4$ 1 [redacted] 1

$n=5$ 1 [redacted] 1

$\vdots$

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

4) Formule du binôme de Newton

Prop 1

Soient $a, b \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=\text{[redacted]}} C_n^k \, a^k \, b^{\text{[redacted]}}$$

Prop 2

Soient $a, b \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}$. On a aussi :

$$(a+b)^n = \sum_{k=\text{[redacted]}} C_n^k \, a^{n-k} \, b^{\text{[redacted]}}$$

5) Identité de Bernoulli

Prop 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. On a :

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=\text{[redacted]}} a^k \cdot b^{\text{[redacted]}}}$$

NB

On a aussi :

$$a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=\text{[redacted]}} a^{\text{[redacted]}} \cdot b^k$$

$$a^n - b^n = (a-b) \times \left(a^{n-1} + a^{\text{[redacted]}} b + \cdots + a b^{\text{[redacted]}} + b^{\text{[redacted]}}\right)$$

$$a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{i+j=\text{[redacted]}} a^i \, b^j$$

Corollaire 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{C}$. On a :

$$x^n - 1 = (x-1) \cdot \sum_{k=\text{[redacted]}} \text{[redacted]}$$

Càd

$$x^n - 1 = (x-1)\left(\text{[redacted]} + \text{[redacted]} + \cdots + \text{[redacted]}\right)$$

IV) Sommes doubles

Prop 1

$$\boxed{\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} a_{ij} = \sum_{\text{[redacted]}} \left(\sum_{\text{[redacted]}} a_{ij} \right) = \sum_{\text{[redacted]}} \left(\sum_{\text{[redacted]}} a_{ij} \right)}$$

On peut permuter $\sum_{i}$ et $\sum_{j}$

NB

Cas de $m = n$:

$\sum_{\substack{1\le i\le \text{[redacted]}\\ 1\le j\le \text{[redacted]}}} a_{ij}$ s'écrit aussi $\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}$

Prop 2

Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $x_1,\dots,x_n, y_1,\dots,y_n\in\mathbb{C}$. On a :

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \sum_{\text{[redacted]}} \text{[redacted]}}$$

Attention à cette erreur !

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \sum_{i=1}^{n}$$ [redacted]

Erreur

Fin