I-Les équations de Cauchy-Riemann

I-A I-A-1) Expressions demandées

. $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = cos(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x}(rcos(\theta), rsin(\theta)) + sin(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y}(rcos(\theta), rsin(\theta))$

. $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta) = -rsin(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x}(rcos(\theta), rsin(\theta)) + rcos(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y}(rcos(\theta), rsin(\theta))$.

I-A-2) Montrons les égalités demandées

. On obtient les mêmes expressions précédentes pour g, en remplacant dans ces expressions f par g.

. Les équations de Cauchy-Riemann introduites dans les expressions de $I-A-1$, entrainent que $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = cos(\theta)\dfrac{\partial g}{\partial y}(rcos(\theta), rsin(\theta)) - sin(\theta)\dfrac{\partial g}{\partial x}(rcos(\theta), rsin(\theta)) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \widetilde{g}}{\partial \theta}(r,\theta)$.

. $\dfrac{\partial \widetilde{g}}{\partial r}(r,\theta) = cos(\theta)\dfrac{\partial g}{\partial x}(rcos(\theta), rsin(\theta)) + sin(\theta)\dfrac{\partial g}{\partial y}(rcos(\theta), rsin(\theta)) =$

$= -cos(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y}(rcos(\theta), rsin(\theta)) + sin(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x}(rcos(\theta), rsin(\theta)) = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta)$.

I-B I-B-1) Valeurs de α tel que $\varphi_\alpha \in \mathcal{E}_n$

. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, φ_α est de classe C^∞ et on a

$\varphi_\alpha =\in \mathcal{E}_n \Longleftrightarrow \forall t>0, \alpha(\alpha-1)t^\alpha + \alpha t^\alpha - n^2t^\alpha = 0 \Longleftrightarrow \alpha^2 - n^2 = 0 \Longleftrightarrow \alpha = \pm n$.

I-B-2) Solutions de $\mathcal{E}_n$

. Si $n=0$.

Soit $f \in \mathcal{E}_0$, alors $\forall t>0, t^2f''(t) + tf'(t) = 0$, donc $\forall t>0, tf''(t) + f'(t) = (tf'(t))' = 0$, ce qui entraine que $\forall t>0, f'(t) = \dfrac{\alpha_0}{t}$ où $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ et par suite $\forall t>0, f(t) = \alpha_0 ln(t) + \beta_0$ où $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, on vérifie bien que ses fonctions sont solutions de $\mathcal{E}_0$.

. Si $n \neq 0$

On vient de montrer dans la question précédente que la famille $(t \longmapsto t^n, t \longmapsto t^{-n})$ est un système fondamental de solutions de $\mathcal{E}_n$, donc les solutions de $\mathcal{E}_n$ sont de la forme $t \longmapsto \alpha_n t^n + \beta_n t^{-n}$ où $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$.

I-C I-C-1) $c_{n,f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

f étant da classe C^1, donc la fonction $(r,\theta) \longmapsto f(rcos(\theta), rsin(\theta))e^{-in\theta}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times [-\pi,\pi]$, donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégral (de Leibniz), $c_{n,f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$\forall r>0, c'_{n,f}(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta = \dfrac{1}{2\pi r}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{\partial \widetilde{g}}{\partial \theta}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta$

or les fonctions $\theta \longmapsto \widetilde{g}(r,\theta)$ et $\theta \longmapsto e^{-in\theta}$ sont de classe C^1 sur $[-\pi,\pi]$, donc une intégration par parties est permise et on obtient

$\forall r>0, (c_{n,f})'(r) = \left[\widetilde{g}(r,\theta)e^{-in\theta}\right]_{-\pi}^{\pi} + \dfrac{in}{2\pi r}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{g}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta = \dfrac{in}{r}c_{n,g}(r)$.

I-C-2) Montrons que $c_{n,f} \in \mathcal{E}_n$ et qu'elle est bornée au voisinage de 0

. Un raisonnement analogue au précédent conduit à que, $c_{n,g}$ est de classe C^1, et

$\forall r>0, (c_{n,g})'(r) = -\dfrac{in}{r}c_{n,f}(r)$, donc $c_{n,f}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$\forall t>0, (c_{n,f})''(r) = (\dfrac{in}{r}c_{n,g}(r))' = -\dfrac{in}{r^2}c_{n,g}(r) - \left(\dfrac{in}{r}\right)^2 c_{n,f}(r) = -\dfrac{1}{r}(c_{n,f}(r))' + \dfrac{n^2}{r^2}c_{n,f}(r)$

ce qui entraine que $\forall r>0, r^2(c_{n,f})'' + r(c_{n,f}(r))' - n^2c_{n,f}(r) = 0$.

. f étant continue sur $\mathbb{R}^2$, donc $\lim\limits_{r\longrightarrow 0^+} \widetilde{f}(r,\theta) = \lim\limits_{r\longrightarrow 0^+} f(rcos(\theta), rsin(\theta)) = f(0,0)$, et par suite

$r \longmapsto \widetilde{f}(r,\theta)$ est bornée au voisinage de 0, c'est à dire $\exists \eta, M>0$ tel que $\forall r \in]0,\eta[, |\widetilde{f}(r,\theta)| \leq M$ ce qui entraine que $\forall r \in]0,\eta[, |c_{n,f}(r)| \leq M$.

. $c_{n,f}$ est solution de $\mathcal{E}_n$, donc $\forall r>0, c_{n,f}(r) = \begin{cases} \alpha_0 ln(r) + \beta_0 & \text{si} \quad n=0 \\ \alpha_n r^n + \beta_n r^{-n} & \text{si} \quad n \neq 0 \end{cases}$, or $c_{n,f}$ est bornée au voisinage de 0, donc $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_n = 0$ si $n<0$ et $\beta_n = 0$ si $n>0$, ce qui entraine que

$\forall r>0, c_{0,f}(r) = \beta_0 r^0$ ou $c_{n,f}(r) = \beta_n r^{-n} = \beta_n r^{|n|}$ si $n<0$ et $c_{n,f}(r) = \alpha_n r^n = \alpha_n r^{|n|}$ si $n>0$

d'où l'existence de $a_n \in \mathbb{C}$ tel que $\forall r>0, c_{n,f}(r) = a_n r^{|n|}$.

I-C-3) Théorème de Dirichlet et égalité demandée

. Théorème de Dirichlet : Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^1 par morceaux et $2\pi-$péridique, alors la série de Fourier de f converge simplement vers la régularisée de f, à savoir $\widetilde{f}:x\longmapsto\dfrac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$, si de plus f est continue sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier converge normalement vesr f sur $\mathbb{R}$.

. $\forall r>0$, La fonction $\theta\longmapsto\widetilde{f}(r,\theta)=f(rcos(\theta),rsin(\theta))$ est de classe C^1, $2\pi-$périodique sur $\mathbb{R}$, de coéfficients de Fourier $c_{n,f}(r)$, donc d'après le théorème de Dirichlet

$$\forall r>0,\forall\theta\in\mathbb{R},\widetilde{f}(r,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_{n,f}(r)e^{in\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nr^{|n|}e^{in\theta}.$$

I-D I-D-1) Les fonctions $c_{n,f}$ sont bornées

Soit $M>0$ un majorant de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, alors

$$\left|\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta)\right|=\left|cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(rcos(\theta),rsin(\theta))+sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(rcos(\theta),rsin(\theta))\right|\leq 2M$$

or $\forall r>0,(c_{n,f}(r))'=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta$, donc $\forall r>0,|(c_{n,f}(r))'|\leq 2M.$

I-D-2) Montrons que les dérivées partielles de f sont bornées

D'après $I-C-2)$ $\forall r>0,c_{n,f}(r)=a_nr^{|n|}$, donc $\forall r>0,(c_{n,f}(r))'=|n|a_nr^{|n|-1}$, donc $\forall n\neq 0,r>0,|a_n|\leq\dfrac{2M}{nr^{|n|-1}}$, ce qui entraine en tendant r vers $+\infty$, que $a_n=0$ pour tout n tel que $|n|\geq 2$, et par suite $\forall(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R},\widetilde{f}(r,\theta)=a_{-1}re^{-i\theta}+a_0+a_1re^{i\theta}$, donc $\dfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta)=a_{-1}e^{-i\theta}+a_1e^{i\theta}$ et $\dfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial\theta}(r,\theta)=ir(-a_{-1}e^{-i\theta}+a_1e^{i\theta})$, Ce qui conduit à

. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=cos(\theta)\dfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial r}-\dfrac{sin(\theta)}{r}\dfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial\theta}=cos(\theta)(a_{-1}e^{-i\theta}+a_1e^{i\theta})-isin(\theta)(-a_{-1}e^{-i\theta}+a_1e^{i\theta})=a_{-1}+a_1.$

. $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{cos(\theta)}{r}\dfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial\theta}+sin(\theta)\dfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial r}=icos(\theta)(-a_{-1}e^{-i\theta}+a_1e^{i\theta})+sin(\theta)(a_{-1}e^{-i\theta}+a_1e^{i\theta})=-i(a_{-1}+a_1).$

II-Quelques solutions de (1)

II-A . Soit $\varphi:(x,y)\longmapsto ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ une fonction de $\mathcal{P}_2$.
Un calcul simple amène à φ vérifie $(1)\Longleftrightarrow(2a)(2c)-(b)^2=1\Longleftrightarrow 4ac-b^2=1.$

II-B Existence d'une solution du problème de Cauchy

. Théorème de Cauchy : Soit $(t_0,u_0)\in\Omega$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f de classe C^1 sur Ω, alors le problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{cc}u'= & f(t,u)\\ u(t_0)= & u_0\end{array}\right.$ admet une unique solution maximale sur un intervalle I ouvert contenant t_0 et toute autre solution est une restriction de cette solution.

. On considère l'application $f:(x,y)\longmapsto-\dfrac{1}{2x}\left(\dfrac{1}{y}-y\right)$ est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}^*)^2$, donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, $\forall(t_0,u_0)\in(\mathbb{R}^*)^2$ l'équation $(II-1)$ admet une solution u de classe C^1 sur un intervalle I ouvert contenant t_0 et vérifiant $u(t_0)=u_0$.

II-C L'équation $(II-1)$ n'admet aucune solution polynômiale

Soit φ une telle solution, alors $\forall t\in J\ \varphi(t)(\varphi(t)+2t\varphi'(t))=-1$ et par passage au degré, on obtient $2deg(\varphi)=0$, donc φ est une constante $C\in\mathbb{R}$, ce qui conduit en introduisant φ dans l'équation $(II-1)$ à la contradiction $C^2=-1$.

II-D II-D-1) Montrons que $\Omega(J)$ est un ouvert non vide

. J étant non vide, soit $x_0\in J$, alors $(x_0,1)\in\Omega(J)$.
. On considère l'application $\varphi:(x,y)\longmapsto xy$, alors φ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
$(x,y)\in\Omega(J)\Longleftrightarrow\varphi(x,y)\in J\Longleftrightarrow(x,y\in\varphi^{-1}(J)$, donc $\Omega(J)=\varphi^{-1}(J)$, donc $\Omega(J)$ c'est un ouvert comme image réciproque de l'ouvert J par l'application continue φ.

II-D-2) . W est de classe C^2 comme composée de l'application polynômiale $(x,y\longmapsto xy$ et de w toutes les deux de classe C^1.

. Les dérivées partielles secondes de W sont $\dfrac{\partial^2W}{\partial x^2}=y^2\omega''(xy)$, $\dfrac{\partial^2W}{\partial y^2}=x^2\omega(xy)$ et $\dfrac{\partial^2W}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2W}{\partial y\partial x}=\omega'(xy)+xy\omega''(xy)$, donc on les équivalences

W vérifie (1) sur $\Omega(J)\Longleftrightarrow\forall(x,y)\in\Omega(J),\quad(y^2\omega''(xy))(x^2\omega''(xy))-(\omega'(xy)+xy\omega''(xy))^2=1\Longleftrightarrow$ $\forall t\in J,\quad t^2\omega''(t)-(\omega'(t)+t\omega''(t))^2=-\omega'(t)(\omega'(t)+2t\omega''(t))=1\Longleftrightarrow\omega'$ vérifie $(II-1)$ sur J.

II-D-3) Montrons que $W \in \mathcal{P}_1$ ssi ω est affine

. Soit $W : (x,y) \longmapsto ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ une restriction à $\Omega(J)$, alors $\forall t \in J, x \in \mathbb{R}^*$, $(t,1), (tx, \dfrac{1}{x}) \in \Omega(J)$, donc $\omega(t) = at^2 + (b+d)t + c + e + f = at^2x^2 + bt + \dfrac{c}{x^2} + dtx + \dfrac{e}{x} + f$ et par suite $\forall t \in J, x \in \mathbb{R}^*$, $at^2x^4 + dtx^3 - (at^2 + dt + c + e)x^2 + ex + c = 0$, d'où le système $\forall t \in J$, $at^2 = dt = at^2 + dt + c + e = e = c = 0$, puis $a = d = c = e = 0$, ce qui entraine que $\forall t \in J$, $\omega(t) = bt + f$.

. Réciproquement, si $\omega(t) = bt + f$, alors $\forall (x,y) \in \Omega(J)$, $W(x,y) = \omega(xy) = bxy + f$, donc W est une restriction à $\Omega(J)$ d'une fonction polynômiale.

II-E Montrons que si f est solution de (1), alors $f_{a,b}$ l'est aussi

$\forall (x,y) \in \Omega_{a,b}$, $\dfrac{\partial^2 f_{a,b}}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-a, y-b)$, $\dfrac{\partial^2 f_{a,b}}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x-a, y-b)$ et $\dfrac{\partial^2 f_{a,b}}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x-a, y-b)$, donc f vérifie (1) sur Ω si, et seulement si $f_{a,b}$ vérifie (1) sur $\Omega_{a,b}$.

II-F Les solutions de (1) non polynômiales sont en nombre infini

. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $t_0 \in \mathbb{R}^*$, alors d'après $(II - B)$, il existe un ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant t_0 et $u \in C^1(I, \mathbb{R})$ tel que u est solution de l'équation $(II - 1)$ sur I.

. Soit ω une primitive(il y en a une infinité), de u sur I, alors $\omega' = u$ est solution de $(II-1)$ sur I, donc d'après $(II - D - 2)$ la fonction $W : (x,y) \longmapsto \omega(xy)$ est solution de (1) dans l'ouvert $\Omega(I)$ qui contient $(t_0, 1)$(car $t_0 \in I$).

. Soit $U = \Omega_{x_0 - t_0, y_0 - 1}$ l'image de $\Omega(I)$ par la translation de vecteur $(x_0 - t_0, y_0 - 1)$, alors U contient (x_0, y_0) et d'après $(II - E)$, $W_{x_0 - t_0, y_0 - 1} : (x,y) \longmapsto W(x - x_0 + t_0, y - y_0 + 1)$ est solution de (1) dans U.

. Si $W_{x_0 - t_0, y_0 - 1}$ coincide sur U avec un élément de $\mathcal{P}_2$, alors d'après la question $(II - D - 3)$, $t \longmapsto \omega(t - x_0 + t_0)$ est affine, donc aussi pour ω et par suite $u = \omega'$ est constante solution de $(II - 1)$, ce qui est absurde d'après la question $(II - C)$.

. En conclusion, les solutions $W_{x_0 - t_0, y_0 - 1}$ sont en nombre infini et ne coincident avec aucun élément de $\mathcal{P}_2$.

III-Un critère de difféomorphisme

III-A Définition et caractérisation d'un C^1-difféomorphisme

. Définition : on dit que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ si, f est bijective et f, f^{-1} sont de classe C^1.

. Une caractérisation : Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est de classe C^1, bijective dont le jacobien ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^2$, alors f est un C^1-difféomorphisme.

III-B III-B-1) Vérification de l'égalité

On considère la fonction $\begin{array}{cccc} \varphi & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & F(p + t(q-p) \end{array}$, alors φ est de classe C^1 comme composée de $t \longmapsto p + t(q-p)$ et F qui sont de classe C^1 et on a $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = dF_{p+t(q-p)}(q-p)$ et par suite $\varphi(1) - \varphi(0) = \displaystyle\int_0^1 \varphi'(t)dt$, ce qui s'écrit aussi $F(q) - F(p) = \displaystyle\int_0^1 dF_{p+t(q-p)}(q-p)dt$.

III-B-2) Montrons l'inégalité demandée

On considère la forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$, $L : x \longmapsto < x, q-p >$, alors

$L\left(\displaystyle\int_0^1 dF_{p+t(q-p)}(q-p)dt\right) = \displaystyle\int_0^1 L\left(dF_{p+t(q-p)}(q-p)\right)dt$, c'est à dire

$\left\langle \displaystyle\int_0^1 dF_{p+t(q-p)}(q-p)dt, q-p \right\rangle = \displaystyle\int_0^1 \left\langle dF_{p+t(q-p)}(q-p) \right\rangle dt$, donc

$< F(q) - F(p), q-p >= \displaystyle\int_0^1 \left\langle dF_{p+t(q-p)}(q-p), q-p \right\rangle dt \geq \displaystyle\int_0^1 \alpha \|q-p\|^2 dt = \alpha \|q-p\|^2.$

III-C III-C-1) Calcul de $dG_p^a(h)$

Soient les deux applications $H : x \longmapsto \|x\|^2$, $K : p \longmapsto F(p) - a$, alors H et K sont de classe C^1 et par suite $G^a = HoK$ est de classe C^1 et on a $\forall p, h \in \mathbb{R}^2$, $dG_p^a(h) = dH_{K(p)}(dK_p(h)) = dH_{K(p)}(dF_p(h)) = 2 < dF_p(h), K(p) >= 2 < dF_p(h), F(p) - a >$.

III-C-2) Limite de $G^a(p)$ à l'infini

$\forall p \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \|p\|^2 \leq\ < F(p) - F(0), p >\ \leq \|F(p) - F(0)\|\ .\ \|p\|$, donc

$\forall p \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|p\| \geq 1$, $\alpha \|p\| \leq \|F(p) - F(0)\| \leq \|F(p) - a\| + \|a - F(0)\|$, ce qui entraine que $\displaystyle\lim_{\|p\| \longrightarrow +\infty} \|F(p) - a\| = +\infty$.

III-C-3) G^a atteint un minimum

. $G^a(p)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|p\|$ tend vers $+\infty$, donc $\exists R > 0$ tel que $\forall \|p\| > R$, $G^a(p) \geq G^a(0)$.

. $\overline{B}(0,R)$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ et $p \longmapsto G^a(p)$ est continue sur $\overline{B}(0,R)$, donc G^a est bornée et atteint sa borne inférieure sur $\overline{B}(0,R)$ en un point p_0, donc $\forall p \in \overline{B}(0,R), G^a(p) \geq G^a(p_0)$ et $\forall p \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|p\| > R$, $G^a(p) \geq G^a(0) \geq G^a(p_0)$, ce qui entraine que $\forall p \in \mathbb{R}^2$, $G^a(p) \geq G^a(p_0)$, c'est à dire G^a atteint un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ au point p_0.

III-C-4) Montrons que $F(p_0) = a$

. G^a admet un minimum en p_0 sur $\mathbb{R}^2$ qui est ouvert, donc $dG^a_{p_0} = 0$, c'est à dire $\forall h \in \mathbb{R}^2$, $< dF_{p_0}(h), F(p_0) - a >= 0$, en particulier pour $h = F(p_0) - a$, on obtient $\alpha\|F(p_0) - a\|^2 \ \leq \ < dF_{p_0}(F(p_0) - a), F(p_0) - a > \ = \ 0$, ce qui entraine que $F(p_0) = a$.

III-D Montrons que F est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$

. F étant de classe C^1, F sujective par la question $(III - C)$.

. Soient $p, q \in \mathbb{R}^2$ tels que $F(p) = F(q)$, alors l'inégalité de $(III - B - 2)$ entraine que $\alpha\|q - p\|^2 \leq< F(q) - F(p), q - p >= 0$, donc $p = q$ et par suite F est injective.

. Soit $p \in \mathbb{R}^2$ et $h \in Ker(dF_p)$, alors $\alpha\|h\|^2 \ \leq< dF_p(h), h >= 0$, donc $h = 0$ et par suite dF_p est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$. On conclut que F est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

IV-Le téorème de Jörgens

IV-A F est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$

. f étant de classe C^2, donc u et v sont de classe C^1, et par suite F est de classe C^1 comme application à composantes de classe C^1.

. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 1 + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et puisque f est de classe C^2, le théorème de Schwarz entraine $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

. La matrice de $JacF(x,y) - I_2$ est $J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$, donc elle est symétrique.

Soient λ_1, λ_2 ses valeurs propres.

. f vérifie (1), donc $det(J) = \lambda_1 \lambda_2 = 1$ et par suite λ_1, λ_2 sont de même signe.

. $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = 1 + \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$, donc $tr(J) = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$ et par suite les valeurs propres de J sont positives, ce qui la rend positive.

. La positivité de la matrice J entraine que $\forall p, h \in \mathbb{R}^2, < (dF_p - id_{\mathbb{R}^2})(h), h > \ \geq \ 0$, donc $< dF_p(h), h > \ \geq \ < h, h >= \|h\|^2$, et la partie (III) avec $\alpha = 1$, entraine que F est un C^1-difféomorphisme.

IV-B IV-B-1) Existence de φ et ψ

. Soient les applications $g, h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $g(x,y) = x - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $h(x,y) = -y + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, alors

la classe C^2 de f entraine que g et h sont de classe C^1.

F étant un C^1-difféomorphisme, donc F^{-1} est de classe C^1 et par suite $\varphi = goF^{-1}$ et o$\psi = hoFo^{-1}$ sont de classe C^1 comme composées d'applications de classe C^1, et ses applications répondent à la question.

IV-B-2) Calcul des dérivées partielles

. L'égalité $\varphi o F = g$ entraine que $Jac\,\varphi(u,v).Jac\varphi\,F(x,y) = Jac\,g(x,y)$, c'est à dire

$\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\begin{pmatrix} 1+r & s \\ s & 1+t \end{pmatrix} = (1-r, -s)$, d'où

$\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right) = \dfrac{1}{2+t+r}(1-r,-s)\begin{pmatrix} 1+t & -s \\ -s & 1+r \end{pmatrix}$, ce qui conduit à

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = \dfrac{t-r}{2+t+r}$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} = \dfrac{-2s}{2+t+r}$.

. Un calcul analogue amène à $\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial u}, \dfrac{\partial \psi}{\partial v}\right) = \dfrac{1}{2+t+r}(s, -1+t)\begin{pmatrix} 1+t & -s \\ -s & 1+r \end{pmatrix}$, donc

$\dfrac{\partial \psi}{\partial u} = \dfrac{2s}{2+t+r}$ et $\dfrac{\partial \psi}{\partial v} = \dfrac{t-r}{2+t+r}$.

IV-B-3) Les dérivées partielles de φ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$

. On rappelle que $r, t > 0$ et $rt - s^2 = 1$.

. $\left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\right| = \left|\dfrac{t-r}{2+t+r}\right| \leq \left|\dfrac{t+r}{2+t+r}\right| < 1$.

. $\left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right|^2 = \dfrac{4s^2}{(2+t+r)^2} = \dfrac{4rt-4}{(2+t+r)^2} \leq \dfrac{4r}{(t+r)^2} \leq 1$, donc $\left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right| \leq 1$.

IV-B-4) Les dérivées partielles de φ sont constantes

φ et ψ sont de classe C^1, donc d'après la question $(I-D)$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}$ sont constantes.

IV-B-5) Montrons que r, s et t sont constantes

En dérivant les égalités $\varphi o F = g$ et $\psi o F = h$ par rapport à x, on obtient le système $\left\{\begin{array}{l} r(1+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}) + s\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = 1 - \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} \\ -r\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + s(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - 1) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \end{array}\right.$, de discriminant $\triangle = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}+1 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ -\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-1 \end{vmatrix} = (\dfrac{\partial\varphi}{\partial u})^2 + (\dfrac{\partial\varphi}{\partial v})^2 - 1 = -\dfrac{4}{t+r+2} < 0$, donc r, s sont des constantes et par suite $t = \dfrac{1+s^2}{r}$ est aussi constante.

IV-C Les seules fonctions solutions de (1) appartiennent à $\mathcal{P}_2$

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant (1).

. on a $r \neq 0$, si non on aura $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = -1$ et quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $r > 0$, donc d'après la partie (IV), r, s et t sont constantes.

.r étant constante, donc $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x,y) = ax^2 + xg(y) + h(y)$ où $g, h \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, or $s = g'(y)$ est constante, donc $g(y) = by + c$, ce qui donne $f(x,y) = ax^2 + bxy + cx + h(y)$ et puisque $t = h''(y)$ est constante, alors $h(y) = dy^2 + ey + f$, ce qui donne enfin $f(x,y) = ax^2 + bxy + dy^2 + cx + ey + f$ avec la condition $4ad - b^2 = 1$.