

## Correction

### Partie I

- 1.a  $\varphi: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  est bien définie.  
Soit  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  et  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  et  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ .  
 $\varphi(\lambda x + \mu y) = \varphi(\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_n + \mu y_n) = (\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y)$ .  
Donc  $\varphi$  est bien un endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$ .
- 1.b  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \ker \varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = (0, \dots, 0) \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$ .  
Donc suite  $\ker \varphi = \{(0, \dots, 0, x_n) / x_n \in \mathbb{K}\} = \text{Vect}(\vec{u})$  avec  $\vec{u} = (0, \dots, 0, 1) \neq \vec{0}$ .  
Ainsi  $\dim \ker \varphi = 1$  et par le théorème du rang  $\dim \text{Im } \varphi = n$ .
- 1.c  $\varphi^2(x_1, \dots, x_n) = (0, 0, x_1, \dots, x_{n-2}), \dots, \varphi^{n-1}(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0, x_1)$  et  $\varphi^n(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$ .  
Ainsi  $\varphi^n = \vec{0}$  et  $\varphi$  est donc un endomorphisme nilpotent.
- 2.a  $\Delta: \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}_n[X]$  est bien définie car si  $\deg P \leq n$  alors  $\deg P(X+1) - \deg P(X) \leq n$ .
- 2.b Si  $P$  est constant alors  $P(X+1) = P(X)$  donc  $\Delta(P) = 0$  et on a  $\deg \Delta(P) = -\infty$ .  
Si  $P$  non constant alors on peut écrire :  
 $P = a_p X^p + Q$  avec  $p = \deg P$ ,  $a_p \in \mathbb{K}^*$  et  $\deg Q \leq p-1$ .  
On a alors  $\Delta(P) = a_p (X+1)^p - a_p X^p + Q(X+1) - Q(X) = p a_p X^{p-1} + R(X)$  avec  $\deg R < p-1$  car la puissance d'exposant  $p-1$  du polynôme  $Q$  s'est simplifiée dans la différence  $Q(X+1) - Q(X)$ .  
Par suite  $\deg \Delta(P) = p-1$ .
- 2.c Par ce qui précède  $\ker \Delta$  est formé des polynômes constants et  $\text{Im } \Delta \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$ .  
On a  $\dim \ker \Delta = 1$  donc par le théorème du rang  $\dim \text{Im } \Delta = \dim \mathbb{K}_n[X] - 1 = n = \dim \mathbb{K}_{n-1}[X]$  donc  
 $\text{Im } \Delta = \mathbb{K}_{n-1}[X]$ .
- 2.d Pour tout  $P \in \mathbb{K}_n[X]$ , on a  $\deg \Delta(P) \leq \deg P - 1$  donc  $\deg \Delta^2(P) \leq \deg P - 2, \dots$ ,  
 $\deg \Delta^{n+1}(P) \leq \deg P - n + 1 < 0$  donc  $\Delta^{n+1}(P) = 0$ . Ainsi  $\Delta^{n+1} = \vec{0}$  et  $\Delta$  est nilpotent.

### Partie II

- 1.a On suppose qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^n = \vec{0}$ .  
 $(f \circ g)^n = (f \circ g) \circ (f \circ g) \circ \dots \circ (f \circ g)$  or  $f$  et  $g$  commutent donc  $(f \circ g)^n = f^n \circ g^n = \vec{0}$  car  $f^n = \vec{0}$ .  
Ainsi  $f \circ g$  est nilpotent.
- 1.b On suppose qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $(f \circ g)^n = \vec{0}$ .  
 $(g \circ f)^{n+1} = (g \circ f) \circ (g \circ f) \circ \dots \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ \dots \circ (f \circ g) \circ f = g \circ (f \circ g)^n \circ f = \vec{0}$ .  
Ainsi  $g \circ f$  est nilpotent.
- 1.c On suppose qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^n = \vec{0}$ .  
 $\text{Id} = \text{Id} - f^n = (\text{Id} - f) \circ (\text{Id} + f + \dots + f^{n-1})$ . En posant  $g = \text{Id} + f + \dots + f^{n-1}$ , on a  
 $(\text{Id} - f) \circ g = g \circ (\text{Id} - f) = \text{Id}$  donc  $\text{Id} - f$  est inversible et  $(\text{Id} - f)^{-1} = g$ .
2. Soit  $A = \{n \in \mathbb{N}^* / f^n = \vec{0}\}$ .  $A$  est une partie de  $\mathbb{Z}$ , minorée et non vide car  $f$  est supposé nilpotent donc  $A$  possède un plus petit élément, c'est notre indice de nilpotence.
- 3.a Puisque  $f^{\nu(f)} = \vec{0}$  on a  $N_{\nu(f)} = \ker f^{\nu(f)} = E$ .
- 3.b Soit  $\vec{x} \in N_p$ , on a  $f^p(\vec{x}) = \vec{0}$  donc  $f^{p+1}(\vec{x}) = f(f^p(\vec{x})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$  d'où  $\vec{x} \in N_{p+1}$ . Ainsi  $N_p \subset N_{p+1}$ .

- 3.c Notons que  $N_p \subset N_{p+1}$  et  $\dim N_p = \dim N_{p+1}$  implique  $N_p = N_{p+1}$   
 Par récurrence sur  $q \in \mathbb{N}$ .  
 Pour  $q = 0$  : ok  
 Supposons la propriété établie au rang  $q \geq 0$ .  
 On a  $N_p = N_{p+q} \subset N_{p+q+1}$ . Inversement, soit  $\vec{x} \in N_{p+q+1}$ . On a  $f^{p+q+1}(\vec{x}) = \vec{0}$  donc  $f^q(\vec{x}) \in N_{p+1} = N_p$   
 d'où  $f^{p+q}(\vec{x}) = \vec{0}$  i.e.  $\vec{x} \in N_{p+q}$ . Ainsi  $N_{p+q+1} \subset N_{p+q} = N_p$ . Par double inclusion l'égalité.  
 Récurrence établie.
- 3.d La suite  $(\dim N_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante d'entiers naturels stationnaire égale à  $\dim E$  à partir du rang  $\nu(f)$ . Par 3.c, dès que deux termes consécutifs sont égaux la suite devient stationnaire donc la suite devient stationnaire à partir d'un rang inférieur à  $\dim E$  et donc  $\nu(f) \leq \dim E$ .

### Partie III

- $C(f) \subset \mathcal{L}(E)$ ,  $\tilde{o} \in C(f)$  car  $\tilde{o} \circ f = f \circ \tilde{o} = \tilde{o}$ .  
 Soit  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  et  $g, h \in C(f)$ .  $f \circ (\lambda g + \mu h) = \lambda f \circ g + \mu f \circ h = \lambda g \circ f + \mu h \circ f = (\lambda g + \mu h) \circ f$  donc  $\lambda g + \mu h \in C(f)$ .
- a  $f^{n-1} \neq \tilde{o}$  car  $n$  est l'indice de nilpotence de  $f$ . Par suite il existe  $\vec{x}_0 \in E$  tel que  $f^{n-1}(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$ .

b Supposons  $\lambda_0 \vec{x}_0 + \lambda_1 f(\vec{x}_0) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(\vec{x}_0) = \vec{0}$ .  
 En appliquant  $f^{n-1}$  à cette relation :  $\lambda_0 f^{n-1}(\vec{x}_0) + \vec{0} + \dots + \vec{0} = \vec{0}$ .  
 Or  $f^{n-1}(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$  donc  $\lambda_0 = 0$ .  
 En appliquant  $f^{n-2}$  à la relation initiale on obtient :  $\lambda_1 f^{n-1}(\vec{x}_0) = \vec{0}$  et donc  $\lambda_1 = 0$ .  
 On obtient ainsi successivement  $\lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ .  
 La famille  $\mathcal{B}$  est donc libre, étant constituée de  $n = \dim E$  vecteurs de  $E$ , c'est une base de  $E$ .
- c  $g(\vec{x}_0) = a_0 \vec{x}_0 + a_1 f(\vec{x}_0) + \dots + a_{n-1} f^{n-1}(\vec{x}_0)$ .  
 $g(f(\vec{x}_0)) = f(g(\vec{x}_0)) = a_0 f(\vec{x}_0) + a_1 f^2(\vec{x}_0) + \dots + a_{n-2} f^{n-1}(\vec{x}_0) \dots$   
 $g(f^k(\vec{x}_0)) = f^k(g(\vec{x}_0)) = a_0 f^k(\vec{x}_0) + a_1 f^{k+1}(\vec{x}_0) + \dots + a_{n-k-1} f^{n-1}(\vec{x}_0)$ .

d Introduisons  $h = a_0 \text{Id} + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1} \in \mathcal{L}(E)$ .  
 Pour tout  $0 \leq k \leq n-1$ ,  $g(f^k(\vec{x}_0)) = h(f^k(\vec{x}_0))$ .  
 $g$  et  $h$  prennent mêmes valeurs sur la base  $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0), \dots, f^{n-1}(\vec{x}_0))$  donc  $g = h$ .
- Par l'étude ci-dessus : Ainsi  $C(f) \subset \{a_0 \text{Id} + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1} \mid a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}\}$ .  
 Inversement pour  $g = a_0 \text{Id} + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$ , on a  $g \circ f = a_0 f + a_1 f^2 + \dots + a_{n-1} f^n = f \circ g$  donc  $g \in C$ . Ainsi  $\{a_0 \text{Id} + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1} \mid a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}\} \subset C(f)$ .  
 Par double inclusion  $C(f) = \{a_0 \text{Id} + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1} \mid a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}\} = \text{Vect}(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1})$ .
- La famille  $(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1})$  est génératrice de  $C(f)$ .  
 De plus si  $a_0 \text{Id} + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1} = \tilde{o}$  alors en évaluant en  $\vec{x}_0$  :  $a_0 \vec{x}_0 + a_1 f(\vec{x}_0) + \dots + a_{n-1} f^{n-1}(\vec{x}_0) = \vec{0}$   
 or la famille  $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0), \dots, f^{n-1}(\vec{x}_0))$  est libre donc  $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ .  
 La famille  $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$  est donc aussi une famille libre.  
 Finalement  $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$  est une base de  $C(f)$  et donc  $\dim C(f) = n$ .