$36 \longrightarrow$ MP2

$G \longrightarrow 17$

$F \longrightarrow 19$

$P(Yahia) = \frac{1}{36}$

$P(Yahia \mid G) = \frac{1}{17}$

$P(Hiba \mid G) = 0$ et $P(Hiba) = \frac{1}{36}$

Pour aller à l'école, Ali emprunte au hasard l'un des trois itinéraires possibles : I_1, I_2 *ou* I_3.

S'il emprunte I_1, il arrive à l'heure.

S'il emprunte I_2, il arrive à l'heure avec la probabilité 3/4.

S'il emprunte I_3, il arrive à l'heure avec la probabilité 2/3.

Quelle est la probabilité que Ali arrive à l'heure?

our aller à l'école, Ali emprunte au hasard l'un des trois itinéraires
ossibles : I_1, I_2 *ou* I_3.

il emprunte I_1, il arrive à l'heure.

il emprunte I_2, il arrive à l'heure avec la probabilité 3/4.

il emprunte I_3, il arrive à l'heure avec la probabilité 2/3.

Quelle est la probabilité que Ali arrive à l'heure?

$I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \Omega$

ou — év certain

certainement Ali prend I_1 ou I_2 ou I_3

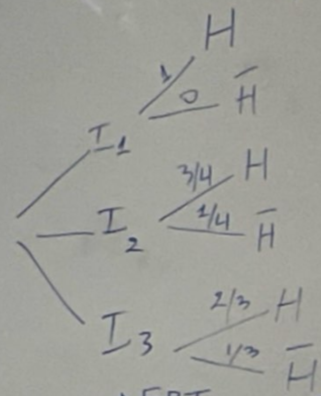
et — impossible

$\underbrace{I_2 \cap I_3 = \emptyset}$

car

« impossible que Ali emprunte I_2 et I_3 et

donc



On a :

$\begin{cases} 1 = P(H|I_1) \\ 0 = P(\overline{H}|I_1) \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{3}{4} = P(H|I_2) \\ \frac{1}{4} = P(\overline{H}|I_2) \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{2}{3} = P(H|I_3) \\ \frac{1}{3} = P(\overline{H}|I_3) \end{cases}$

FPT : I_1, I_2 et I_3 forment SCE

$P(H) = \underbrace{P(H|I_1)}_{1} \cdot \underbrace{P(I_1)}_{1/3} + \underbrace{P(H|I_2)}_{3/4} \cdot \underbrace{P(I_2)}_{1/3} + \underbrace{P(H ...}_{2/...}$

$= \boxed{\frac{V}{V}}$

Exercice 2 :

Une compagnie aérienne étudie la réservation sur l'un de ses vols. Une place donnée est libre le jour d'ouverture de la réservation (c'est le jour 0) .

Son état évolue chaque jour jusqu'à la fermeture de la réservation de la manière suivante :

Si la place est réservée le jour k, elle le sera encore le jour $k+1$ avec la probabilité $\frac{9}{10}$.

Si la place est libre le jour k, elle sera réservée le jour $k+1$ avec la probabilité $\frac{4}{10}$.

Pour k entier positif, on note r_k la probabilité que la place soit réservée le jour k.

0). Calculer r_0 et r_1.

1. Exprimer r_{k+1} en fonction de r_k.

Aujourd'hui, Ali est arrivé à l'heure. Quelle est la probabilité qu'il avait pris I_1 ?

Exercice 2 :

Une compagnie aérienne étudie la réservation sur l'un de ses vols. Une place donnée est libre le jour d'ouverture de la réservation (c'est le jour 0) .

Son état évolue chaque jour jusqu'à la fermeture de la réservation de la manière suivante :

Si la place est réservée le jour k, elle le sera encore le jour $k+1$ avec la probabilité $\frac{9}{10}$.

Si la place est libre le jour k, elle sera réservée le jour $k+1$ avec la probabilité $\frac{4}{10}$.

Pour k entier positif, on note r_k la probabilité que la place soit réservée le jour k.

0). Calculer r_0 et r_1 .

1. Exprimer r_{k+1} en fonction de r_k.

Notons : R_k : « Le jour k la place est réservée »

$\frac{9}{10} = P(\ ? \ )$

$\frac{4}{10} = P(\ ? \ )$

$\{A, \bar{A}\}$ est un SCE

⚠

Notons : R_k : « Le jour k la place est réservée »

$\frac{9}{10} = P(R_{k+1} | R_k)$ (donc $\frac{1}{10} = P(\overline{R_{k+1}} | R_k)$)

$\frac{4}{10} = P(R_{k+1} | \overline{R_k})$ (donc $\frac{6}{10} = P(\overline{R_{k+1}} | \overline{R_k})$)

$r_k = P(R_k)$.

$r_{k+1} = P(R_{k+1})$

FPT

$= \underbrace{P(R_{k+1} | R_k)}_{\frac{9}{10}} . \underbrace{P(R_k)}_{r_k} + \underbrace{P(R_{k+1} | \overline{R_k})}_{4/10} . \underbrace{P(\overline{R_k})}_{(1 - r_k)}$

$$\boxed{r_{k+1} = \frac{1}{2} r_k + \frac{2}{5}}$$

Scanned with CamScanner

PROBABILITES

Partie 1

Exercice 1 :

Pour aller à l'école, Ali emprunte au hasard l'un des trois itinéraires possibles : I_1, I_2 *ou* I_3.

S'il emprunte I_1, il arrive à l'heure.

S'il emprunte I_2, il arrive à l'heure avec la probabilité 3/4.

S'il emprunte I_3, il arrive à l'heure avec la probabilité 2/3.

Aujourd'hui, Ali est arrivé à l'heure. Quelle est la probabilité qu'il avait pris I_1 ?

Exercice 2 :

éraires

qu'il avait pris I_1 ?

$$P(I_1|H) = \frac{P(H|I_1)\cdot P(I_1)}{\sum_{k=1}^{3} P(H|I_k)\cdot P(I_k)}$$

→ Formule de Bayes

On veut $P(I_1|H) = ?$

On sait : $\begin{cases} P(H) \\ P(I_k)\,;\ 1 \leq k \leq 3 \\ P(H|I_k)\,;\ 1 \leq k \leq 3 \end{cases}$

Réponse :

$$P(I_1|H) = \frac{\overbrace{P(H\cap I_1)}^{=\,?}}{\underbrace{P(H)}_{\hookrightarrow \text{connu}}}$$

$$P(H\cap I_1) = \underbrace{P(H|I_1)}_{\hookrightarrow \text{connu}}\cdot \underbrace{P(I_1)}_{\hookrightarrow \text{connu}}$$

Fin

Prop (Formule de Bayes)

Si $\begin{cases} 1)\ (A_1, \dots, A_n) \text{ est un système complet d'évenements.} \\ 2)\ \forall i,\ P(A_i) \neq 0 \end{cases}$

Alors :

$$\boxed{\forall B \in T,\ \forall j \in [\![1, n]\!],\ P(A_j | B) = \frac{P(B/A_j) \times P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) \times P(A_i)}}$$

$$P(I_1 | H) = \frac{P(H | I_1) \cdot P(I_1)}{\sum_{k=1}^{3} P(H | I_k) \cdot P(I_k)}$$

→ Formule de Bayes

On veut $P(I_1 | H) = ?$

On sait : $\begin{cases} P(H) \\ P(I_k)\ ;\ 1 \leq k \leq 3 \\ P(H | I_k)\ ;\ 1 \leq k \leq 3 \end{cases}$

Réponse :

$$P(I_1 | H) = \frac{\overbrace{P(H \cap I_1)}^{=?}}{\underbrace{P(H)}_{\text{connu}}}$$

$$P(H \cap I_1) = \underbrace{P(H | I_1)}_{\text{connu}} \cdot \underbrace{P(I_1)}_{\text{connu}}$$

Fin

6) Formule des probabilités composées

Prop (Formule des probabilités composées)

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = ?\,?$$

Prop (Formule des probabilités composées)

Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements quelconques tels que :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$$

On a :

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2 | A_1) \times P(A_3 | A_1 \cap A_2) \times \dots \times P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}$$

Exercice d'application

On dispose d'une urne contenant 4 boules noires et 5 boules blanches.

B	N
5	4

On tire 3 boules successivement et sans remise.

Quelle est la probabilité que ces 3 boules tirées soient toutes blanches ?

Solution

Solution

Considérons les événements suivants :

B_1 : « La $1^{ère}$ boule tirée est blanche »

B_2 : « La $2^{ème}$ boule tirée est blanche »

B_3 : « La $3^{ème}$ boule tirée est blanche »

On veut calculer $P(B_1 \underset{\downarrow \\ \text{et}}{\cap} B_2 \underset{\downarrow \\ \text{et}}{\cap} B_3)$.

On a :

B	N
5	4

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \underbrace{P(B_1)}_{5/9} \times \underbrace{P(B_2 | B_1)}_{4/8} \times \underbrace{P(B_3 | B_1 \cap B_2)}_{3/7}$$

$$= \frac{5}{42}$$

$\square$