

FAMILLES SOMMABLES

Exercice 1 :

- 1) Déterminer les réels α tels que la famille $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ soit sommable.
- 2) Montrer que

$$\left(\frac{1}{(m^2 + n^2)^\alpha}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \text{ sommable} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{(m+n)^{2\alpha}}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \text{ sommable}$$

- 3) En déduire les réels α pour lesquels la famille $\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

Exercice 2 :

Soient $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Montrer l'existence de la somme suivante et calculer sa valeur : $\sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} e^{im\theta}$

Exercice 3 :

Montrer l'existence de la somme suivante et calculer sa valeur :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}$$

Exercice 4 :

Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}^*$.

Déterminer la nature des séries suivantes :

- 1) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$
- 2) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(\sigma(n))^2}$
- 3) $\sum_{\substack{n \geq 1 \\ n}} \frac{\sigma(n)}{n^2}$; **Indice** : Considérer $S_{2n} - S_n$, où S_n la somme partielle d'ordre n
- 4) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\sigma(n)}$; **Indice** : Vous pouvez utiliser le résultat de 2)

Exercice 5 :

Soit $n \geq 1$. Considérons les séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$ où $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Montrer que les séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$ convergent, alors que leur série produit de Cauchy diverge.

Exercice 6 :

Montrer l'existence de la somme suivante et calculer sa valeur :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$$

Exercice 7 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille sommable.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{\sum_{k=0}^n 2^k u_k}{2^n}$.

Montrer que la famille $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable, et déterminer sa somme en fonction de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 8 :

1) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.

$$\text{On rappelle que : } \forall z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

2) Montrer, via le produit de Cauchy de deux séries, que :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$$

3) Soit A une algèbre normée de dimension finie. Soient u et v deux éléments de A qui commutent.

$$\text{Notons } S_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$$

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|S_n(u)S_n(v) - S_n(u+v)\| \leq S_n(\|u\|)S_n(\|v\|) - S_n(\|u\| + \|v\|)$$

b) En déduire que :

$$e^{u+v} = e^u \times e^v$$

FAMILLES SOMMABLES

Exercice 1 :

- 1) Déterminer les réels α tels que la famille $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ soit sommable.

CORRECTION

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}} \text{ est sommable} \Leftrightarrow ?$$

Rappel 1

$(I_n)_{n \geq 2}$ est une partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
où $I_n = \{(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / i + j = n\}$

Rappel 2

$(a_i)_{i \in I}$ famille positive et I dénombrable.

$(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une partition de I . On a :

$$(a_i)_{i \in I} \text{ sommable} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{a) } \forall k \in \mathbb{N}, (a_i)_{i \in I_k} \text{ est sommable} \\ \text{b) La série } \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{i \in I_k} a_i \right) \text{ converge} \end{cases}$$

La famille $\left(\frac{1}{(m+n)^2}\right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}}$ est positive.

Et $(I_k)_{k \geq 2}$ est une partition de $(\mathbb{N}^{*})^2$, où $I_k = \{(i,j) \in \mathbb{N}^{*2} / i+j=k\}$

D'où :

$$\left(\frac{1}{(m+n)^2}\right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}} \text{ est sommable} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{a) } \forall k \geq 2, \left(\frac{1}{(m+n)^2}\right)_{(m,n) \in I_k} \text{ est sommable} \\ \text{b) La série } \sum_{k \geq 2} \left(\sum_{(m,n) \in I_k} \frac{1}{(m+n)^2} \right) \text{ converge} \end{cases}$$

Pour a) $\forall k \geq 2, \left(\frac{1}{(m+n)^2}\right)_{(m,n) \in I_k}$ est sommable

C'est vérifié car c'est une famille finie, donc sommable.

Notons que $I_k = \{(i,j) \in \mathbb{N}^{*2} / i+j=k\} = \{(i, k-i) / 1 \leq i \leq k-1\}$

D'où I_k est fini et $\text{Card}(I_k) = k-1$ $\square$

Pour b)

Soit $k \geq 2$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{(m,n) \in I_k} \frac{1}{(m+n)^2} &= \sum_{(m,n) \in I_k} \frac{1}{k^2} \quad \text{constante} \\ &= \text{Card}(I_k) \times \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{k-1}{k^2} \end{aligned}$$

$$(m,n) \in I_k \Leftrightarrow m+n=k$$

Alors

$$\sum_{k \geq 2} \left(\sum_{(m,n) \in \mathbb{I}_k} \frac{1}{(m+n)^\alpha} \right) \text{ converge} \Leftrightarrow \text{La série } \sum_{k \geq 2} \left(\sum_{(m,n) \in \mathbb{I}_k} \frac{1}{(m+n)^\alpha} \right) \text{ converge.}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k \geq 2} \frac{k-1}{k^\alpha} \text{ converge}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^{\alpha-1}} \text{ converge}$$

$$\frac{k-1}{k^\alpha} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k}{k^\alpha} \sim \frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha-1 > 1 \quad (\text{série de Riemann}) \quad \text{Car}$$

$$\Leftrightarrow \alpha > 2$$

Enfin :

$$\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha} \right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \text{ est sommable} \Leftrightarrow \text{La série } \sum_{k \geq 2} \left(\sum_{(m,n) \in \mathbb{I}_k} \frac{1}{(m+n)^\alpha} \right) \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 2$$



1) Déterminer les réels α tels que la famille $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ soit sommable.

2) Montrer que

$$\left(\frac{1}{(m^2 + n^2)^\alpha}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \text{ sommable} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{(m+n)^{2\alpha}}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \text{ sommable}$$

3) En déduire les réels α pour lesquels la famille $\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

CORRECTION

L'idée

Ça sante aux yeux!

Ça doit être par comparaison des familles positives.

Comparons $\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$ et $\frac{1}{(m+n)^{2\alpha}}$.

En ignorant le α , comparons $\frac{1}{(m^2+n^2)}$ et $\frac{1}{(m+n)^2}$.

Càd, comparons (m^2+n^2) et $(m+n)^2$.

Soit $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\text{On a : } (m+n)^2 = m^2 + n^2 + 2mn \gg m^2 + n^2$$

$\Rightarrow$

$$m^2 + n^2 \leq (m+n)^2$$

et on a :

$$2mn \leq m^2 + n^2 \quad \left(\text{car } |m-n| \geq 0 \right)$$

$$\Rightarrow (m+n)^2 = m^2 + n^2 + 2mn \leq 2(m^2 + n^2)$$

D'où

$$m^2 + n^2 \leq (m+n)^2 \leq 2(m^2 + n^2)$$

Levons à la puissance α .

On sait que la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est croissante sur $]0, +\infty[$ si $\alpha \geq 0$ et décroissante si $\alpha < 0$.

Cas 1 : Si $\alpha \geq 0$

$$\text{On a } m^2 + n^2 \leq (m+n)^2 \leq 2(m^2 + n^2)$$

$$\Rightarrow (m^2 + n^2)^\alpha \leq (m+n)^{2\alpha} \leq 2^\alpha (m^2 + n^2)^\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^\alpha (m^2 + n^2)^\alpha} \leq \frac{1}{(m+n)^{2\alpha}} \leq \frac{1}{(m^2 + n^2)^\alpha}$$

Par comparaison des familles positives on tire que :

$$\left(\frac{1}{(m^2 + n^2)^\alpha} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \text{ sommable} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{(m+n)^{2\alpha}} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \text{ sommable}$$

CQFD

Cas 2 : Si $\alpha < 0$

$$\text{On a } m^2 + n^2 \leq (m+n)^2 \leq 2(m^2 + n^2)$$

$$\Rightarrow (m^2 + n^2)^\alpha \geq (m+n)^{2\alpha} \geq 2^\alpha (m^2 + n^2)^\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(m^2 + n^2)^\alpha} \leq \frac{1}{(m+n)^{2\alpha}} \leq \frac{1}{2^\alpha (m^2 + n^2)^\alpha}$$

Par comparaison des familles positives on tire que :

$$\left(\frac{1}{(m^2 + n^2)^\alpha} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \text{ sommable} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{(m+n)^{2\alpha}} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \text{ sommable}$$

CQFD



- 1) Déterminer les réels α tels que la famille $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ soit sommable.
- 2) Montrer que

$$\left(\frac{1}{(m^2 + n^2)^\alpha}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \text{ sommable} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{(m+n)^{2\alpha}}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \text{ sommable}$$

- 3) En déduire les réels α pour lesquels la famille $\left(\frac{1}{(m^2 + n^2)^\alpha}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. ?

CORRECTION

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left(\frac{1}{(m^2 + n^2)^\alpha}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \text{ sommable} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{(m+n)^{2\alpha}}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \text{ sommable} \quad (\text{d'après 2})$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha > 2 \quad (\text{d'après 1})$$

$$\Leftrightarrow \alpha > 1$$

□

Fin Exercice 1

Exercice 2 :

Soient $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Montrer l'existence de la somme suivante et calculer sa valeur : $\sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} e^{im\theta}$

CORRECTION

Soient $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Montrer l'existence de la somme $\sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} e^{im\theta}$ revient à montrer que

la famille $\left(r^{|m|} e^{im\theta} \right)_{m \in \mathbb{Z}}$ est sommable.

Montrons que la famille $\left(r^{|m|} e^{im\theta} \right)_{m \in \mathbb{Z}}$ est sommable.

On a :

$\left(r^{|m|} e^{im\theta} \right)_{m \in \mathbb{Z}}$ est sommable $\Leftrightarrow$??

Rappel

$(a_i)_{i \in I}$ famille de réels ou complexes et I dénombrable.

I_1 et I_2 forment une partition de I . On a :

1) $(a_i)_{i \in I}$ sommable $\Leftrightarrow (a_i)_{i \in I_1}$ et $(a_i)_{i \in I_2}$ sommables

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I_1} a_i + \sum_{i \in I_2} a_i$$

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}^{-*}$ forment une partition de $\mathbb{Z}$.

D'où :

$$\left(r^{|m|} e^{im\theta} \right)_{m \in \mathbb{Z}} \text{ est sommable} \Leftrightarrow \left(r^{|m|} e^{im\theta} \right)_{m \in \mathbb{N}} \text{ et } \left(r^{|m|} e^{im\theta} \right)_{m \in \mathbb{Z}^{-*}} \text{ sommables}$$

D'autre part :

$$0 \leq r < 1 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\left(r^{|m|} e^{im\theta} \right)_{m \in \mathbb{N}} \text{ sommable} \Leftrightarrow ?$$

Rappel

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ une série à termes réels ou complexes. On a :

1) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sommable $\Leftrightarrow$ La série $\sum_{n \geq 0} a_n$ ACV

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

$$\Leftrightarrow \text{La série } \sum_{m \geq 0} r^{|m|} e^{im\theta} \text{ est ACV}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{m \geq 0} |r^{|m|} e^{im\theta}| \text{ converge}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{m \geq 0} r^m \text{ converge (car } \begin{cases} |e^{im\theta}| = 1 \\ |m| = m \end{cases})$$

Ce qui est vrai car $\sum_{m \geq 0} r^m$ est une série géométrique et $0 \leq r < 1$.

$$\text{D'où } \left(r^{|m|} e^{im\theta} \right)_{m \in \mathbb{N}} \text{ est sommable.} \quad \square$$

$$\left(r^{|m|} e^{im\theta} \right)_{m \in \mathbb{Z}^{-*}} \text{ sommable} \Leftrightarrow ?$$

$$0 \leq r < 1 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

On a

Rappel

I est supposé dénombrable.

Soit $\sigma: \mathbb{N}^* \rightarrow I$ une bijection.

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de réels ou complexes. On a:

$$1) (a_i)_{i \in I} \text{ sommable} \Leftrightarrow \text{La série } \sum_{n \geq 1} a_{\sigma(n)} \text{ ACV}$$

2) Dans ce cas, on a:

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$$

L'application $\sigma: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z}^{-*}$ est une bijection,
 $n \mapsto -n$

D'où :

$$\left(r^{|m|} e^{im\theta} \right)_{m \in \mathbb{Z}^{-*}} \text{ sommable} \Leftrightarrow \text{La série } \sum_{n \geq 1} r^{|\sigma(n)|} e^{i\sigma(n)\theta} \text{ ACV}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} r^n e^{-in\theta} \text{ ACV}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} \left| r^n e^{-in\theta} \right| \text{ Converge}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} r^n \text{ Converge}$$

Ce qui est vrai car $\sum_{n \geq 1} r^n$ est une série géométrique et $0 \leq r < 1$.

D'où $\left(r^{|m|} e^{im\theta} \right)_{m \in \mathbb{Z}^{-*}} \text{ sommable}$ □

Enfin $\left(r^{|m|} e^{im\theta} \right)_{m \in \mathbb{Z}}$ est sommable. $\square$

Calculons la somme $\sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} e^{im\theta}$:

Rappel

$(a_i)_{i \in I}$ famille de réels ou complexes et I dénombrable.

I_1 et I_2 forment une partition de I . On a :

1) $(a_i)_{i \in I}$ sommable $\Leftrightarrow (a_i)_{i \in I_1}$ et $(a_i)_{i \in I_2}$ sommables

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I_1} a_i + \sum_{i \in I_2} a_i$$

La famille $\left(r^{|m|} e^{im\theta} \right)_{m \in \mathbb{Z}}$ est sommable, et $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}^{-*}$ forment une partition de $\mathbb{Z}$.

D'où

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} e^{im\theta} &= \sum_{m \in \mathbb{N}} r^{|m|} e^{im\theta} + \sum_{m \in \mathbb{Z}^{-*}} r^{|m|} e^{im\theta} \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} r^{|m|} e^{im\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^{|-n|} e^{-in\theta} \quad \left(\text{voir les rappels ci-dessus} \right) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} r^m e^{im\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{-in\theta} \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} (re^{i\theta})^m + \sum_{n=1}^{+\infty} (re^{-i\theta})^n$$

$$= \frac{1}{1-re^{i\theta}} + \frac{re^{-i\theta}}{1-re^{-i\theta}}$$

$$= \frac{1-r^2}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}$$

$$= \frac{1-r^2}{1-r(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+r^2}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{q^N}{1-q}$$

Si $|q| < 1$

Rappel

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} e^{im\theta} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

Fin Exercice 2

Exercice 3 :

Montrer l'existence de la somme suivante et calculer sa valeur :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}$$

CORRECTION

Montrer l'existence de la somme $\sum_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}$ revient à

montrer que la famille $\left(\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} \right)_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ est sommable.

Soit $(a_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double positive.

1) Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $(a_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

ii) A) $\forall m \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geq 0} a_{mn}$ converge
B) La série $\sum_{m \geq 0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn} \right)$ converge.

iii) A) $\forall n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{m \geq 0} a_{mn}$ converge
B) La série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{mn} \right)$ converge.

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{mn} = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{mn} \right)$$

Rappel

On a :

$$\left(\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} \right)_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \text{ est sommable } \Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{m \geq 0} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} < \infty \\ \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} \right) < \infty \end{cases} \quad \text{CV}$$

(A) Pour $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{m \geq 0} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} < \infty \right) \text{ CV}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut que la série $\sum_{m \geq 0} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} < \infty$ CV

On a $\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} \sim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m^2}$

et $\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^2}$ converge (Riemann ; $\alpha = 2 > 1$)

Donc par comparaison des séries positives, la série $\sum_{m \geq 0} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} < \infty$ CV □

(B) Pour $\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} \right) < \infty$ CV

Soit $n \geq 1$. On a :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^m \frac{1}{(k+n^2)(k+n^2+1)} \right)$$

$$= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m \left(\frac{1}{k+n^2} - \frac{1}{k+n^2+1} \right)$$

$$= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m+n^2+1} \right) \quad \text{(Somme télescopique)}$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} = \frac{1}{n^2}$$

La série $\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} \right)$ est donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ qui

est convergente, comme série de Riemann ($d=2 > 1$). $\square$

Enfin $\left(\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} \right)_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ est sommable et on a :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}}_{= \frac{1}{n^2}} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{6} \quad \square$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

somme classique

Fin Exercice 3

Exercice 4 :

Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}^*$.

Déterminer la nature des séries suivantes :

1) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$

CORRECTION

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n)} \text{ converge } \Leftrightarrow ?$$

Rappel

I est supposé dénombrable.

Soit $\sigma: \mathbb{N}^* \rightarrow I$ une bijection.

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille positive. On a

1) $(a_i)_{i \in I}$ sommable $\Leftrightarrow$ La série $\sum_{n \geq 1} a_{\sigma(n)}$ converge

On a $\left\{ \begin{array}{l} \sigma: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^* \text{ est une bijection} \\ \left(\frac{1}{i} \right)_{i \in \mathbb{N}^*} \text{ est une famille positive} \end{array} \right.$

Donc $\left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n)} \text{ converge } \Leftrightarrow \left(\frac{1}{i} \right)_{i \in \mathbb{N}^*} \text{ est sommable} \right.$

$\Leftrightarrow ??$

Rappel

Soit $\sum_{n \geq 1} a_n$ une série à termes positifs. On a :

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sommable $\iff$ La série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge

D'où :

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$ converge $\iff \left(\frac{1}{i} \right)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est sommable

$\iff \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i}$ converge (famille positive)

Or $\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i}$ diverge, comme série de Riemann ($\alpha = 1 \leq 1$)

D'où $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$ diverge aussi.



Exercice 4 :

Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}^*$.

Déterminer la nature des séries suivantes :

1) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$

2) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(\sigma(n))^2}$

?

CORRECTION

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(\sigma(n))^2} \text{ converge } \Leftrightarrow ?$$

Rappel

I est supposé dénombrable.

Soit $\sigma: \mathbb{N}^* \rightarrow I$ une bijection.

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille positive. On a

1) $(a_i)_{i \in I}$ sommable $\Leftrightarrow$ La série $\sum_{n \geq 1} a_{\sigma(n)}$ converge

On a $\left\{ \begin{array}{l} \sigma: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^* \text{ est une bijection} \\ \left(\frac{1}{i^2} \right)_{i \in \mathbb{N}^*} \text{ est une famille positive} \end{array} \right.$

2) On $\left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(\sigma(n))^2} \text{ converge } \Leftrightarrow \left(\frac{1}{i^2} \right)_{i \in \mathbb{N}^*} \text{ est sommable} \right.$

$\Leftrightarrow ??$

Rappel

Soit $\sum_{n \geq 1} a_n$ une série à termes positifs. On a :

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ sommable} \iff \text{La série } \sum_{n \geq 1} a_n \text{ converge}$$

D'où :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(\sigma(n))^2} \text{ converge} \iff \left(\frac{1}{n^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est sommable}$$

$$\iff \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge (famille positive)}$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, comme série de Riemann ($\alpha = 2 > 1$)

D'où $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(\sigma(n))^2}$ converge aussi.



Exercice 6 :

Montrer l'existence de la somme suivante et calculer sa valeur :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$$

CORRECTION

Bronillon :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{3^n} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3} \right)^n \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3} \right)^k \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-k} \right)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n U_k V_{n-k} \right) \text{ où } \begin{cases} U_k = \left(\frac{1}{3} \right)^k \\ V_k = \left(\frac{1}{3} \right)^k \end{cases}$$

Rédaction :

On veut montrer l'existence de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$, et de déterminer sa valeur.

On montrera que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{3^n}$ converge.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{3^n} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{3^n} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right) \text{ où } \begin{cases} u_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k \\ v_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k \end{cases}$$

Alors $\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{3^n}$ est le produit de Cauchy des deux

séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$, où $u_n = v_n = \frac{1}{3^n}$.

Or $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ est **ACV**, comme série géométrique et que $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$.

Donc la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{3^n}$ est ACV, donc converge, et

l'impresa,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} = \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n \right)}_{\rightarrow = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}} \times \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n \right)}_{\rightarrow = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} = \frac{9}{4}$$



Exercice 7 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille sommable.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{\sum_{k=0}^n 2^k u_k}{2^n}$.

Montrer que la famille $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable, et déterminer sa somme en fonction de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

CORRECTION

Montrons que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable.

Il s'agit de montrer que la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ est absolument convergente.

On a :

$$\sum_{n \geq 0} w_n = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\sum_{k=0}^n 2^k u_k}{2^n} \right)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n u_k \cdot \frac{1}{2^{n-k}} \right)$$

$$\sum_{n \geq 0} w_n = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n u_k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \right)$$

2^o On voit que $\sum_{n \geq 0} w_n$ est le produit de Cauchy des deux séries

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ et } \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$\sum_{n \geq 0} u_n$ est ACV car la famille $(u_n)_{n \geq 0}$ est sommable.

Et la série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est ACV, comme série géométrique

avec $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.

D'où $\sum_{n \geq 0} w_n$ est ACV.

Et on a aussi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)}_{= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2}$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

$$\text{Or : } \sum_{n \in \mathbb{N}} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

Alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} w_n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

