Correction

1.a u^n est un endomorphisme de E et on sait qu'image et noyau d'un endomorphisme sont des sous-espaces vectoriels.

1.b $\forall \vec{y} \in F_{n+1} = \operatorname{Im} u^{n+1}$, $\exists \vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = u^{n+1}(\vec{x})$ donc $\vec{y} = u^n(u(\vec{x})) \in \operatorname{Im} u^n = F_n$. Ainsi $F_{n+1} \subset F_n$.

$\forall \vec{x} \in G_n = \ker u^n$, on a $u^{n+1}(\vec{x}) = u(u^n(\vec{x})) = u(\vec{o}) = \vec{o}$ donc $\vec{x} \in \ker u^{n+1} = G_{n+1}$. Ainsi $G_n \subset G_{n+1}$.

2. $F \subset E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\vec{o} \in F_n$ car F_n est un sous-espace vectoriel de E, donc $\vec{o} \in F$.

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\vec{x}, \vec{y} \in F$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\vec{x}, \vec{y} \in F_n$, or F_n est un sous-espace vectoriel de E donc $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in F_n$ et donc $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in F$.

$G \subset E$. $\vec{o} \in G_1$ car $\vec{u}(\vec{o}) = \vec{o}$ donc $\vec{o} \in G$.

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\vec{x}, \vec{y} \in G$. Il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $\vec{x} \in G_n$ et $\vec{y} \in G_m$.

Posons $p = \max(n, m)$. On a $G_n, G_m \subset G_p$ donc $\vec{x}, \vec{y} \in G_p$.

Or G_p est un sous-espace vectoriel de E dont $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in G_p$ puis $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in G$.

2.b Soit $\vec{x} \in F$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\vec{x} \in F_n$ donc $u(\vec{x}) \in F_{n+1}$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u(\vec{x}) \in F_n$.

De plus $F_0 = \operatorname{Im} u^0 = \operatorname{Im} \mathrm{Id} = E$, donc $u(\vec{x}) \in F_0$. Ainsi $u(\vec{x}) \in F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $u(\vec{x}) \in F$.

Soit $\vec{x} \in G$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\vec{x} \in G_n$ c'est à dire tel que $u^n(\vec{x}) = \vec{o}$.

Si $n > 0$, alors $u^{n-1}(u(\vec{x})) = \vec{o}$ donc $u(\vec{x}) \in G_{n-1}$ puis $u(\vec{x}) \in G$.

Si $n = 0$, alors $u^0(\vec{x}) = \vec{o}$ donc $\vec{x} = \vec{o}$ car $u^0 = \mathrm{Id}$. Mais alors $u(\vec{x}) = \vec{o}$ et donc $u(\vec{x}) \in G$.

2.c Si u est un automorphisme de E alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, u^n l'est aussi.
On a donc $F_n = E$ car u^n surjectif et $G_n = \{\vec{o}\}$ car u^n injectif. Au final $F = E$ et $G = \{\vec{o}\}$.

3.a Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.
Pour $p = 0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $p \geq 0$.
La suite (F_n) est décroissante donc $F_{n+p+1} \subset F_{n+p}$.
Soit $\vec{y} \in F_{n+p}$, $\exists \vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = u^{n+p}(\vec{x})$.
Or $u^n(\vec{x}) \in F_n = F_{n+1}$ donc $\exists \vec{a} \in E$ tel que $u^n(\vec{x}) = u^{n+1}(\vec{a})$ et donc
$\vec{y} = u^p(u^n(\vec{x})) = u^p(u^{n+1}(\vec{a})) = u^{n+p+1}(\vec{a}) \in F_{n+p+1}$. Ainsi $F_{n+p} \subset F_{n+p+1}$.
Par double inclusion, $F_{n+p} = F_{n+p+1}$, puis par HR, $F_n = F_{n+p+1}$.
Récurrence établie.

3.b L'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} / F_n = F_{n+1}\}$ est une partie de $\mathbb{Z}$, non vide (via l'hypothèse du 4.) et minorée, elle possède donc un plus petit élément.
Puisque la suite (F_n) est décroissante et stationnaire à partir du rang $r(u)$ donc $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = F_{r(u)}$.

3.c Soit $\vec{x} \in E$. On a $u^{r(u)}(\vec{x}) \in F_{r(u)}$. Or $F_{r(u)} = F_{2r(u)}$ donc il existe $\vec{a} \in E$ tel que $u^{r(u)}(\vec{x}) = u^{2r(u)}(\vec{a})$.
Posons alors $\vec{y} = u^{r(u)}(\vec{a})$ et $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$.
Clairement $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ et $\vec{y} \in F_{r(u)} = F$.
De plus $u^{r(u)}(\vec{z}) = u^{r(u)}(\vec{x}) - u^{r(u)}(\vec{y}) = u^{r(u)}(\vec{x}) - u^{2r(u)}(\vec{a}) = \vec{o}$ donc $\vec{z} \in G_{r(u)}$.

4.a Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.
Pour $p = 0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $p \geq 0$.
On a déjà $G_{n+p} \subset G_{n+p+1}$ car (G_n) est croissante.
Soit $\vec{x} \in G_{n+p+1}$. On a $u^{n+p+1}(\vec{x}) = \vec{o}$ donc $u^p(\vec{x}) \in G_{n+1}$.
Or $G_{n+1} = G_n$ donc $u^p(\vec{x}) \in G_n$ et donc $u^{n+p}(\vec{x}) = \vec{o}$ i.e. $\vec{x} \in G_{n+p}$. Aines $G_{n+p+1} \subset G_{n+p}$.
Par double inclusion $G_{n+p} = G_{n+p+1}$. Par HR, $G_{n+p+1} = G_n$. Récurrence établie.

4.b Soit $A=\{n\in\mathbb{N}/G_{n+1}=G_n\}$.

A est une partie de $\mathbb{Z}$, minorée par 0 et par l'hypothèse de la question 3., non vide.
Elle possède donc un plus petit élément.
La suite (G_n) est croissante et stationnaire à partir du rang $s(u)$ donc $G=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}G_n=G_{s(u)}$.

4.c Soit $\vec{x}\in F_{s(u)}\bigcap G$. Il existe $\vec{a}\in E$ tel que $\vec{x}=u^{s(u)}(\vec{a})$ et on a $u^{s(u)}(\vec{x})=\vec{o}$.

On a alors $u^{2s(u)}(\vec{a})=u^{s(u)}(\vec{x})=\vec{o}$ donc $\vec{a}\in G_{2s(u)}$. Or $G_{2s(u)}=G_{s(u)}$ donc $\vec{x}=u^{s(u)}(\vec{a})=\vec{o}$.

Ainsi $F_{s(u)}\bigcap G\subset\{\vec{o}\}$, l'autre inclusion est aussi vraie car $F_{s(u)}$ et G sont des sous-espaces vectoriels donc $F_{s(u)}\bigcap G=\{\vec{o}\}$.

5.a On sait déjà $G_n\subset G_{n+1}$.

Soit $\vec{x}\in G_{n+1}$. On a $\vec{u}^{n+1}(\vec{x})=\vec{o}$.

$\vec{u}^n(\vec{x})\in F_n=F_{n+1}$ donc $\exists\vec{a}\in E$ tel que $\vec{u}^n(\vec{x})=\vec{u}^{n+1}(\vec{a})$.

$u^{n+1}(\vec{x})=\vec{o}$ donne alors $\vec{u}^{n+2}(\vec{a})=\vec{o}$ donc $\vec{a}\in G_{n+2}=G_{n+1}$ puis $u^{n+1}(\vec{a})=\vec{o}$ i.e. $u^n(\vec{x})=\vec{o}$.

Ainsi $G_{n+1}\subset G_n$ et finalement $G_n=G_{n+1}$.

5.b On sait déjà $F_{n+1}\subset F_n$.

Soit $\vec{y}\in F_n$. Il existe $\vec{a}\in E$ tel que $\vec{y}=u^n(\vec{a})$.

$\vec{u}(\vec{y})=u^{n+1}(\vec{a})\in F_{n+1}=F_{n+2}$ donc il existe $\vec{b}\in E$ tel que $\vec{u}^{n+1}(\vec{a})=u^{n+2}(\vec{b})$.

On a alors $u^{n+1}(\vec{a}-u(\vec{b}))=\vec{o}$ donc $\vec{a}-u(\vec{b})\in G_{n+1}=G_n$ d'où $u^n(\vec{a}-u(\vec{b}))=\vec{o}$.

Ainsi $\vec{y}=u^n(\vec{a})=u^{n+1}(\vec{b})\in F_{n+1}$. Finalement $F_n\subset F_{n+1}$ puis $F_n=F_{n+1}$.

6.a Les questions 5.a et 5.b permettent d'affirmer respectivement que $s(u)\le r(u)$ et que $r(u)\le s(u)$. Par suite $r(u)=s(u)$.

6.b $F=F_{r(u)}=F_{s(u)}$ et $G=G_{r(u)}=G_{s(u)}$.

Les relations $E=F+G_{r(u)}$ et $F_{s(u)}\cap G=\{\vec{o}\}$ donne $E=F+G$ et $F\cap G=\{\vec{o}\}$ donc F et G sont supplémentaires.

6.c Pour alléger, posons $p=r(u)=s(u)$. On a $F=F_p$ et $G=G_p$.

Soit $\vec{x}\in\ker u_{|F}$. On a $\vec{x}\in F$ et $\vec{u}(\vec{x})=\vec{o}$.

Puisque $\vec{x}\in F=F_p$, il existe $\vec{a}\in E$ tel que $\vec{x}=u^p(\vec{a})$.

$\vec{u}(\vec{x})=\vec{o}$ donne alors $u^{p+1}(\vec{a})=\vec{o}$ donc $\vec{a}\in G_{p+1}$. Or $G_{p+1}=G_p$ donc $\vec{a}\in G_p$ puis $\vec{x}=u^p(\vec{a})=\vec{o}$.

Ainsi $\ker u_{|F}=\{\vec{o}\}$. Ainsi $u_{|F}$ est injectif.

Soit $\vec{y}\in F=F_p$. Il existe $\vec{a}\in E$ tel que $\vec{y}=u^p(\vec{a})$.

Or $F_p=F_{p+1}$ donc $\exists\vec{b}\in E$ tel que $u^p(\vec{a})=u^{p+1}(\vec{b})$ et donc $\vec{y}=u(\vec{x})$ avec $\vec{x}=u^p(\vec{b})\in F_p$.

Ainsi $u_{|F}$ est surjectif. Au final $u_{|F}$ est un automorphisme.

Soit $\vec{x}\in G=G_p$. On a $u^p(\vec{x})=\vec{o}$ donc $(u_{|G})^p=0$. $u_{|G}$ est nilpotent.