CONCOURS MINES-PONTS 2022

CORRIGÉ MATHEMATIQUES II - MP

m.laamoum@gmail.com

Autour des exponentielles de matrices

On rappelle les résultats suivants :

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$.
  Les applications suivantes sont continues , car elles sont linéaires en dimensions finies :

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto A.M & M \mapsto M.A & M \mapsto P.M.P^{-1} & M \mapsto {}^tM \end{array}$$

- Soit f et g deux fonctions vectorielles, dérivables, à valeurs dans un espace de dimension finie E.
  Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et $B : E \times E \to F$ bilinéaire et F de dimension finie. Alors les fonctions $t \to \varphi(f(t))$ et $t \to B(f(t), g(t))$ sont dérivables avec

$$(\varphi(f(t)))' = \varphi(f'(t)) \quad \text{et} \quad (B(f(t), g(t)))' = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t)).$$

1 Questions préliminaires

1 $\triangleright$ Soit A ,$B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A et B commutent donc pour tout m dans $\mathbb{N}$ on a

$$A\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{B^k}{k!}\right) = \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{B^k}{k!}\right) A$$

Le passage à la limite sur m est justifié par la continuité, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, des applications $M \mapsto A.M$ et $M \mapsto M.A$ (*elles sont linéaires en dimension finie)* . Ainsi on a $A\ .\ \mathbf{e}^B = \mathbf{e}^B.A$.

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & \mathbf{e}^{t(A+B)}\mathbf{e}^{-tB} \end{array}$$

2 $\triangleright$ Soit $t \in \mathbb{R}$ on a $f\ '_A(t) = A.\mathbf{e}^{tA} = \mathbf{e}^{tA}.A$.

L'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (M, N) & \longmapsto & M.N \end{array}$$

est bilinéaire et $g(t) = \varphi(\mathbf{e}^{t(A+B)}, \mathbf{e}^{-tB})$, donc g est dérivable et

$$\begin{array}{rcl} g'(t) & = & \varphi(\left(\mathbf{e}^{t(A+B)}\right)', \mathbf{e}^{-tB}) + \varphi(\mathbf{e}^{t(A+B)}, \left(\mathbf{e}^{-tB}\right)') \\ & = & \varphi((A+B).\mathbf{e}^{t(A+B)}, \mathbf{e}^{-tB}) + \varphi(\mathbf{e}^{t(A+B)}, -B.\mathbf{e}^{-tB}) \\ & = & (A+B)\mathbf{e}^{t(A+B)}.\mathbf{e}^{-tB} - \mathbf{e}^{t(A+B)}.B.\mathbf{e}^{-tB} \end{array}$$

Comme A et B commutent donc les matrices B et $(A+B)$ commutent par suite $\mathbf{e}^{t(A+B)}$ et B commutent, ce qui donne

$$g'(t) = A.\mathbf{e}^{t(A+B)}.\mathbf{e}^{-tB} = A.g(t)$$

Soit U un vecteur de $\mathbb{K}^n$, les fonctions vectorielles : $F : t \mapsto f_A(t).U$ et $G : t \mapsto g(t).U$ sont solutions du problème de Cauchy

$$X' = A.X \text{ et } X(0) = U$$

Par unicité de la solution de ce problème on a

$$f_A(t).U = g(t).U \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ceci est vrai pour tout vecteur U donc

$$f_A(t) = g(t) \quad \text{soit } \mathbf{e}^{t(A+B)}.\mathbf{e}^{-tB} = \mathbf{e}^{tA} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

La relation est vraie pour $A = 0$ et donne $\mathbf{e}^{tB}.\mathbf{e}^{-tB} = I_n \quad \forall t \in \mathbb{R}$, on en déduit

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathbf{e}^{t(A+B)} = \mathbf{e}^{tA}\mathbf{e}^{tB}$$

3 $\triangleright$ On suppose : $\mathbf{e}^{t(A+B)} = \mathbf{e}^{tA}\mathbf{e}^{tB}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. On dérive cette relation en utilisant l'application bilinéaire φ définie dans la question précédente , on obtient

$$(A+B)\mathbf{e}^{t(A+B)} = A.\mathbf{e}^{tA}.\mathbf{e}^{tB} + \mathbf{e}^{tA}.B.\mathbf{e}^{tB}$$

On dérive une deuxième foit :

$$(A+B)^2\mathbf{e}^{t(A+B)} = A^2.\mathbf{e}^{tA}.\mathbf{e}^{tB} + A.\mathbf{e}^{tA}.B.\mathbf{e}^{tB} + A.\mathbf{e}^{tA}.B.\mathbf{e}^{tB} + \mathbf{e}^{tA}.B^2.\mathbf{e}^{tB}$$

(*si f une fonction vectorielle à valeurs dans $M_n(K)$ dérivable, alors* $(A.f(t))' = A.f'(t)$)
Pour $t = 0$ on obtient

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Or $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, ce qui prouve que $A.B = B.A$.
4 $\triangleright$ Pour toute m dans $\mathbb{N}$ on a

$$\left\|\sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!}\right\| \leq \sum_{k=0}^{m} \frac{\left\|A^k\right\|}{k!}$$

la relation (N_1) donne , par récurrence $\left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k$ ainsi

$$\left\|\sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!}\right\| \leq \sum_{k=0}^{m} \frac{\|A\|^k}{k!}$$

par passage à la limite sur m , et la continuité de la norme, on obtient

$$\left\|\mathbf{e}^A\right\| \leq e^{\|A\|}$$

5 $\triangleright$ A est trigonalisable sur $\mathbb{C}$, il existe P matrice inversible et T triangulaire telles que $A = P.T.P^{-1}$, donc

$$\mathbf{e}^A = P.\mathbf{e}^T.P^{-1}$$

De plus on a

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ avec } \mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, .., \lambda_n\}$$

ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{T^k}{k!}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=0}^{m}\frac{\lambda_1^k}{k!} & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & \sum\limits_{k=0}^{m}\frac{\lambda_n^k}{k!}\end{pmatrix}$$

par passage a la limite sur m on obtient

$$\mathbf{e}^T=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\det\left(\mathbf{e}^A\right) &= \det\left(\mathbf{e}^T\right)\\ &= e^{\lambda_1+..+\lambda_n}\\ &= e^{\operatorname{tr}(A)}\end{aligned}$$

2 Formule de Trotter-Kato

6 ▷ On a

$$\begin{aligned}\|X_k\| &\leqslant \left\|\exp\left(\tfrac{1}{k}A\right)\right\|\left\|\exp\left(\tfrac{1}{k}B\right)\right\|\\ &\leqslant \exp\left(\frac{\|A\|}{k}\right)\exp\left(\frac{\|B\|}{k}\right)=\exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|Y_k\| &= \left\|\exp\left(\tfrac{1}{k}\left(A+B\right)\right)\right\|\\ &\leq \exp\left(\frac{\|A+B\|}{k}\right)\\ &\leq \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right)\end{aligned}$$

7 ▷ Remarquons que

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{e}^{tA}-I_n-tA\right\| &= \left\|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}A^k\right\|\\ &\leq \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|t|^k}{k!}\left\|A^k\right\|\\ &\leq \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\left(|t|\,\|A\|\right)^k}{k!}\\ &\leq \left(|t|\,\|A\|\right)^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\left(|t|\,\|A\|\right)^{k-2}}{k!}\end{aligned}$$

comme $\frac{1}{k!}\leq\frac{1}{(k-1)!}$ alors

$$\left\|\mathbf{e}^{tA}-I_n-tA\right\|\leq\left(|t|\,\|A\|\right)^2e^{|t|\|A\|}$$

Dans notre cas

$$\left\|\mathbf{e}^{\frac{1}{k}A} - I_n - \frac{1}{k}A\right\| \leq \frac{\|A\|^2}{k^2} e^{\frac{1}{k}\|A\|} \leq \frac{\|A\|^2 e^{\|A\|}}{k^2}$$

donc

$$\mathbf{e}^{\frac{1}{k}A} = I_n + \frac{1}{k}A + O(\frac{1}{k^2})$$

Ce qui donne lorsque $k \to +\infty$

$$X_k - Y_k = \left(I_n + \frac{1}{k}A + O(\frac{1}{k^2})\right)\left(I_n + \frac{1}{k}B + O(\frac{1}{k^2})\right) - \left(I_n + \frac{1}{k}(A + B = +O(\frac{1}{k^2})\right) = O(\frac{1}{k^2})$$

8 $\triangleright$ On a

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k-1} X_k^i \left(X_k - Y_k\right) Y_k^{k-i-1} &= \sum_{i=0}^{k-1} X_k^{i+1} Y_k^{k-(i+1)} - X_k^i Y_k^{k-i} \\ &= X_k^k - Y_k^k\end{aligned}$$

Ecrivons

$$\left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\exp\left(\frac{1}{k}B\right)\right)^k - \exp(A+B) = X_k^k - Y_k^k$$

la relation précédente donne

$$\left\|X_k^k - Y_k^k\right\| \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \|X_k\|^i \|Y_k\|^{k-i-1} \|X_k - Y_k\|$$

nous avons

$$\|X_k\| \leqslant \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right), \|Y_k\| \leqslant \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right)$$

donc

$$\begin{aligned}\left\|X_k^k - Y_k^k\right\| &\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right)^{k-1} \|X_k - Y_k\| \\ &\leqslant k \exp\left(\frac{(k-1)\|A\| + \|B\|}{k}\right) \|X_k - Y_k\| \\ &\leqslant k \exp\left(\|A\| + \|B\|\right) \|X_k - Y_k\|\end{aligned}$$

ainsi $X_k^k - Y_k^k = O(\frac{1}{k})$donc $\lim\limits_{k \to +\infty} X_k^k - Y_k^k = 0$ d'où

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\exp\left(\frac{1}{k}B\right)\right)^k = \exp(A+B)$$

3 Vers les algèbres de Lie

9 $\triangleright$ Si $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$,

$$M \in \mathcal{A}_G \Leftrightarrow \det \mathbf{e}^{tM} = e^{t\,\mathrm{tr}(M)} = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{tr}(M) = 0$$

$\mathcal{A}_G = \ker(\mathrm{tr})$, le noyau de la forme linéaire tr , donc c'est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
10 $\triangleright$ Si $G = O_n(R)$,

$$M \in \mathcal{A}_G \Leftrightarrow \ {}^t\left(\mathbf{e}^{sM}\right)\mathbf{e}^{sM} = I_n \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

d'autre part on a

$$^{t}\left(\mathbf{e}^{sM}\right) = {}^{t}\left(\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=2}^{m}\frac{s^k}{k!}M^k\right)$$

l'application $M \mapsto {}^{t}M$ est linéaire en dimension fine donc elle est continue donc

$$\begin{aligned} ^{t}\left(\mathbf{e}^{sM}\right) &= \lim_{m\to+\infty} {}^{t}\left(\sum_{k=2}^{m}\frac{s^k}{k!}M^k\right) \\ &= \lim_{m\to+\infty}\sum_{k=2}^{m}\frac{s^k}{k!}\ {}^{t}M)^k \\ &= \mathbf{e}^{s^{t}M} \end{aligned}$$

donc

$$M \in \mathcal{A}_G \Leftrightarrow \mathbf{e}^{s^{t}M}\mathbf{e}^{sM} = I_n \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Si $M \in A_n(R)$, ${}^{t}M = -M$ et $\mathbf{e}^{s^{t}M}\mathbf{e}^{sM} = I_n \quad \forall s \in R$ donc $M \in A_G$ et $A_n(R) \subset A_G$.
Si $\mathbf{e}^{s^{t}M}\mathbf{e}^{sM} = I_n \quad \forall s \in R$ alors la dérivé par rapport à s donne

$${}^{t}M\mathbf{e}^{s^{t}M}\mathbf{e}^{sM} + \mathbf{e}^{s^{t}M}M\mathbf{e}^{sM}{=}0 \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}$$

en particulier pour $s = 0$, ${}^{t}M + M$ et $M \in A_n(R)$ et $A_G \subset A_n(R)$. Ce qui montrer que $A_G = A_n(R)$.
Dans les questions 11) à 14), G est un sous-groupe fermé quelconque de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
11 $\triangleright$ On a $I_n \in G$ donc $0 \in \mathcal{A}_G$. Soit $M \in \mathcal{A}_G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbf{e}^{t\lambda M} \in G$$

donc $\lambda M \in \mathcal{A}_G$.
Soit $A, B \in \mathcal{A}_G$. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a $\left(\exp\left(\frac{t}{k}A\right)\exp\left(\frac{t}{k}B\right)\right)^k \in G$ et G fermé donc

$$\exp(t(A+B)) = \lim_{k\to+\infty}\left(\exp\left(\frac{t}{k}A\right)\exp\left(\frac{t}{k}B\right)\right)^k \in G$$

et $A + B \in \mathcal{A}_G$.
Donc $\mathcal{A}_G$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
12 $\triangleright$ Soient $A \in \mathcal{A}_G$ et $B \in \mathcal{A}_G$. Soit $s \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{su(t)} &= \exp\left(s\mathbf{e}^{tA}B\mathbf{e}^{-tA}\right) \\ &= \mathbf{e}^{tA}\mathbf{e}^{sB}\mathbf{e}^{-tA} \in G \qquad \left(\text{ car } \left(e^{tA}\right)^{-1} = \mathbf{e}^{-tA}\right) \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall t \in \mathbb{R}, u(t) \in \mathcal{A}_G$$

13 $\triangleright$ u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$u'(t) = A\mathbf{e}^{tA}B\mathbf{e}^{-tA} - \mathbf{e}^{tA}BA\mathbf{e}^{-tA}$$

Et on a

$$u'(0) = AB - BA$$

Comme $\dfrac{1}{t}\left(u(t) - u(0)\right) \in \mathcal{A}_G$ et ce dernier est fermé donc $u'(0) = \lim_{t\to0}\frac{u(t)-u(0)}{t}$ et $\mathcal{A}_G$.
Ainsi,

$$[A, B] = AB - BA \in \mathcal{A}_G$$

14 $\triangleright$ Soit $M \in \mathcal{A}_G$, on pose $\gamma(t) = \mathbf{e}^{tM}$ qui est un chemin dérivable dans G tel que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$. On en déduit que $M \in \mathcal{T}_{I_n}(G)$ et $\mathcal{A}_G \subset \mathcal{T}_{I_n}(G)$.
15 $\triangleright$ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, On trigonalise M dans $M_n(\mathbb{C})$: $M = PTP^{-1}$ avec la diagonale de T est $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, les valeurs propres de A. On a

$$\begin{aligned}\delta_M(t) &= \det(I_n + tM)\\ &= \det(I_n + tT)\\ &= \prod_{i=1}^{n}(1 + t\lambda_i) \quad (\textit{ fonction polynomiale en } t)\\ &= 1 + t\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + o(t)\end{aligned}$$

On en déduit que $\delta_M$est dérivable en 0 et $\delta'_M(0) = \mathrm{Tr}(M)$
16 $\triangleright$ Posons $f = \det$, $\delta'_M(0)$ est la dérivée de f en I_n suivant la direction M, l'application f est différentiable, donc

$$D_M f(I_n) = df_{I_n}(M) = \delta'_M(0)$$

d'où

$$df_{I_n}(M) = \mathrm{Tr}(M) \quad \text{et } df_{I_n} = \mathrm{Tr}$$

17 $\triangleright$ Soit $M \in \mathcal{T}_{I_n}(SL_n(\mathbb{R}))$ et γ application dérivable d'un voisinage de 0 vers $SL_n(\mathbb{R})$ telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$.
On a $\det(\gamma(t)) = fo\gamma(t) = 1$ pour tout t au voisinage de 0. La différentielle de composée de fonction donne

$$df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = 0$$

Pour $t = 0$ on trouve

$$df_{I_n}(M) = \mathrm{Tr}(M) = 0$$

Ainsi on a $\mathcal{T}_{I_n}(SL_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{A}_{SL_n(\mathbb{R})}$. L'inclusion réciproque a été montrée en **14** $\triangleright$,d'où l'égalité.
Soit $M \in \mathcal{T}_{I_n}(O_n(\mathbb{R}))$ et γ application dérivable d'un voisinage de 0 vers $O_n(\mathbb{R})$ telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$.
Alors, on a $\gamma(t)\ .^t\gamma(t) = I_n$ pour tout t au voisinage de 0 . Différentions cette relation :

$$\gamma'(t).^t\gamma(t) + \gamma(t).\left(^t\gamma(t)\right)' = 0$$

la transposition est linéaire donc $\left(^t\gamma(t)\right)' = {}^t\gamma'(t)$. Ainsi pour $t = 0$, on trouve $M + M^T = 0$ Donc $\mathcal{T}_{I_n}(O_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{A}_{O_n(\mathbb{R})}$. L'inclusion réciproque a été montrée en **14** $\triangleright$, d'où l'égalité.

4 Comportement asymptotique

Étude d'un exemple

18 $\triangleright$ On a $\chi_A(X) = (X - \alpha)(X - \beta)^2$, par le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, on a

$$\mathbb{C}^3 = \ker(A - \alpha I_n) \oplus \underbrace{\ker(A - \beta I_n)^2}_{G}$$

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A, G est stable par f alors $f_{|G}$ est trigonalisable et $\chi_{f_{|G}}(X) = (X-\beta)^2$.

Donc il existe une base (e_2, e_3) de G dans laquelle la matrice de $f_{|G}$ est de la forme $\begin{pmatrix} \beta & a \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

Soit e_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre α, on en déduit que dans la base (e_1, e_2, e_3), la matrice de f est

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & a \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Ainsi A et T sont semblables.

On a

$$\begin{pmatrix} \beta & a \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \beta I_2 + a \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$

avec $N^2 = 0$, la formule du binôme donne

$$\begin{pmatrix} \beta & a \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n = \beta^n I_2 + n\beta^{n-1} a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un calcul par bolcs donne

$$T^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & n\beta^{n-1}a \\ 0 & 0 & \beta^n \end{pmatrix}$$

Et

$$\mathbf{e}^{tT} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(t\alpha)^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(t\beta)^n}{n!} & at \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n(t\beta)^{n-1}}{n!} \\ 0 & 0 & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(t\beta)^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t\beta} & ate^{t\beta} \\ 0 & 0 & e^{t\beta} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{e}^{tA}$ et $\mathbf{e}^{tT}$ sont semblables donc on a $\mathbf{e}^{tA} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $\mathbf{e}^{tT} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Comme $\left|e^{t\alpha}\right| = e^{t\,\mathrm{Re}(\alpha)}$ donc $e^{t\,\mathrm{Re}(\alpha)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $\mathrm{Re}(\alpha) < 0$.

De même $e^{t\,\mathrm{Re}(\alpha)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $te^{t\,\mathrm{Re}(\alpha)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si, $\mathrm{Re}(\beta) < 0$.

Ainsi

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbf{e}^{tA} = 0_3 \iff \mathrm{Re}(\alpha) < 0 \text{ et } \mathrm{Re}(\beta) < 0$$

Cas général

19 $\triangleright$ On trigonalise A : $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire supérieure, de diagonale $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Alors $f_A(t) = P\mathbf{e}^{tT}P^{-1}$, $\mathbf{e}^{tT}$ de diagonale $(e^{t\lambda_1}, \ldots, e^{t\lambda_n})$. La continuité de l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ donne

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} f_A(t) &= 0_n \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} f_T(t) = 0_n \\ &\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} e^{t\lambda_k} = 0 \quad \text{pour } k \in \{1, .., n\} \\ &\Rightarrow \mathrm{Re}\,(\lambda_k) < 0 \quad \text{pour } k \in \{1, .., n\} \end{aligned}$$

Ainsi , si $\lim\limits_{t\to+\infty} f_A(t) = 0_n$, alors $\alpha = \max\limits_{\lambda \in Sp(A)} \mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

20 $\triangleright$ Le polynôme caractéristique de A s'écrit $\chi_A = \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X-\lambda)^{m_\lambda}$.

Les polynômes $(X-\lambda)^{m_\lambda}$ sont deux à deux premiers entre eux, le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux donnent

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \mathrm{Ker}\left((A-\lambda I_n)^{m_\lambda}\right) = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} F_\lambda$$

21 $\triangleright$ **Décomposition de Dunford** : Les sous espaces F_λ sont stables par A, car $(A-\lambda I_n)^{m_\lambda}$ et A commutent . Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Alors, $\nu_\lambda = u_{|F_\lambda} - \lambda\,\mathrm{id}_{F_\lambda}$ est un endomorphisme nilpotent de F_λ. Soit $x\in\mathbb{C}^n$, x s'ecrit d'une manière unique de la forme :

$$x = \sum_{x_\lambda\in F_\lambda} x_\lambda$$

Soit ν et δ les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ définies par

$$\nu\,(x) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \nu_\lambda(x_\lambda) \;\text{ et }\; \delta\,(x) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \lambda x_\lambda$$

Puisque $\nu_\lambda^{m_\lambda}=0$ alors $\nu_\lambda^n=0$, par suite $\nu^n=0$, donc ν est nilpotent et δ est diagonalisable de plus on a : $u=\nu+\delta$ et $\nu o\delta=\delta o\nu$.
Soit D et N les matrices de δ et ν , respectivement, dans une base adapté à la somme directe de la question **20** $\triangleright$,alors A est semblable à $D+N$ et il existe P inversible telle que , $A=P(D+N)P^{-1}$, $ND=DN$,D est diagonale, N est nilpotente et $\chi_A=\chi_D$.
22 $\triangleright$ On a

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^{tA} &= P\mathbf{e}^{t(D+N)}P^{-1}\\ &= P\mathbf{e}^{tD}\mathbf{e}^{tN}P^{-1} \qquad (\text{ car } ND=DN\ )\end{aligned}$$

Soit p l'indice de nilpotence de N, alors $\mathbf{e}^{tN}=\sum\limits_{k=0}^{p}\frac{t^k}{k!}N^k$ donc

$$\left\|\mathbf{e}^{tN}\right\| = \sum_{k=0}^{p}\frac{|t|^k}{k!}\left\|N^k\right\| \underset{t\to+\infty}{=} O\left(t^p\right)$$

Et on a

$$\mathbf{e}^{tD} = \mathrm{diag}\left(e^{t\lambda_1},\ldots,e^{t\lambda_n}\right) = \sum_{k=1}^{n} e^{t\lambda_k}E_{k,k}$$

donc

$$\left\|\mathbf{e}^{tD}\right\| \le \sum_{k=1}^{n} e^{t\,\mathrm{Re}(\lambda_k)}\left\|E_{k,k}\right\| \underset{t\to+\infty}{=} O(e^{\alpha t})$$

Finalement

$$\left\|\mathbf{e}^{tA}\right\| \le \|P\|.\left\|\mathbf{e}^{tD}\right\|.\left\|\mathbf{e}^{tN}\right\|.\left\|P^{-1}\right\| \underset{t\to+\infty}{=} O\left(t^pe^{\alpha t}\right)$$

La norme $\|.\|_\infty$ est équivalente $\|.\|$ donc $\left\|\mathbf{e}^{tA}\right\|_\infty = \max\limits_{i,j}|v_{i,j}(t)| \underset{t\to+\infty}{=} O\left(t^pe^{\alpha t}\right)$.
Ainsi pour tout $(i,j)\in[[1,n]]^2$ $v_{i,j}(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(t^p\mathbf{e}^{\alpha t}\right)$.
23 $\triangleright$ Si $\alpha<0$, alors pour tout $(i,j)\in[[1,n]]^2$ $v_{i,j}(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(t^p\mathbf{e}^{\alpha t}\right) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f_A(t)=0_n$.
24 $\triangleright$ On suppose que les valeurs propres A ont toutes des parties réelles positives ou nulles.
Si $X=0$ c'est evident.
Soit $X\in\mathbb{C}^n$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathbf{e}^{tA}X$. On a $A=P(D+N)P^{-1}$, avec P inversible , $ND=DN$,D est

diagonale et N est nilpotente.

$$\mathbf{e}^{tA}X = P.\mathbf{e}^{t(D+N)}.P^{-1}X$$

donc

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbf{e}^{t(D+N)}.Y = 0 \ \text{ avec } Y = P^{-1}X$$

$\mathbf{e}^{t(D+N)}$ est triangulaire de diagonale $(e^{t\lambda_1}, .., e^{t\lambda_n})$, si $Y = {}^t(y_1, .., y_n)$ alors

$$\mathbf{e}^{t(D+N)}.Y = {}^t(*, .., *, e^{t\lambda_n}y_n)$$

ainsi $e^{t\lambda_n}y_n \underset{t\to+\infty}{\rightarrow} 0$, or $\mathrm{Re}(\lambda_n) \geq 0$ donc $y_n = 0$, par suite $Y = {}^t(y_1, .., y_{n-1}, 0)$ et

$$\mathbf{e}^{t(D+N)}.Y = {}^t(*, .., *, e^{t\lambda_{n-1}}y_{n-1}, 0)$$

ainsi par récurrence on montre que $y_1 = ... = y_n = 0$, d'ou $Y = 0$ et $X = 0$.

25 $\triangleright$ On a $\chi_A = P_S P_i P_n$, les polynômes P_S, P_i et P_n sont deux à deux premiers entre eux, par le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$E = E_s \oplus E_i \oplus E_n$$

Les sous espaces E_s, E_i et E_n sont stable par u , l'endomorphisme canoniquement associé à A .
Soit $X \in E$, on écrit $X = \begin{pmatrix} X_s \\ Y \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} X_s \\ 0 \end{pmatrix} \in E_s$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix} \in E_i \oplus E_n$. A est semblable à une matrice de la forme $\mathrm{diag}\,(A_s, B)$ où A_s est la matrice de la restriction u à E_s et B la matrice de la restriction de u à $E_i \oplus E_n$. De plus $\chi_{A_s} = P_s$ et $\chi_B = P_i P_n$ donc $e^{tA_s} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On a $A = P\,\mathrm{diag}\,(A_s, B)\,P^{-1}$, $P = \mathrm{diag}\,(P_s, Q)$ et $P^{-1} = \mathrm{diag}\left(P_s^{-1}, Q^{-1}\right)$, donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{tA}X &= P\begin{pmatrix} e^{tA_s} & 0 \\ 0 & e^{tB} \end{pmatrix} P^{-1}\begin{pmatrix} X_s \\ Y \end{pmatrix} \\
&= P\begin{pmatrix} e^{tA_s} & 0 \\ 0 & e^{tB} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X'_s \\ Y' \end{pmatrix} \quad \text{, avec } X'_s = P_s^{-1}X_s \ etY' = Q^{-1}Y \\
&= P\begin{pmatrix} e^{tA_s}X'_s \\ e^{tB}Y' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Si $X \in E_s$, alors $Y' = 0$ et $e^{tA_s}X'_s \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0$.
Réciproquement si $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbf{e}^{tA}X = 0$ alors $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbf{e}^{tB}Y' = 0$ et les valeurs propres B ont toutes des parties réelles positives ou nulles , donc $Y' = 0$ et $X \in E_s$, ce qui montrer que

$$E_s = \left\{X \in E \mid \lim_{t\to+\infty} \mathbf{e}^{tA}X = 0\right\}.$$

26 $\triangleright$ A est semblable à une matrice de la forme $\mathrm{diag}\,(C, A_n)$ où A_n est la matrice de la restriction u à E_n et C la matrice de la restriction de u à $E_s \oplus E_s$. De plus $\chi_{A_n} = P_n$ donc $\mathrm{Sp}(A_n) = \{i\mu_1, .., i\mu_r\} \subset i\mathbb{R}$.
On a $A = P\,\mathrm{diag}\,(C, A_n)\,P^{-1}$, $P = \mathrm{diag}\,(R, P_n)$ et $P^{-1} = \mathrm{diag}\left(R^{-1}, P_n^{-1}\right)$, par suite $\mathbf{e}^{tA} = P\,\mathrm{diag}\left(\mathbf{e}^{tC}, \mathbf{e}^{tA_n}\right)P^{-1}$
On écrit $A_n = Q\,(D_n + N_n)\,Q^{-1}$ avec $D_n = \mathrm{diag}\ (i\mu_1, .., i\mu_r)$ et N_n nilpotente qui commute avec D_n.
Donc $e^{tA_n} = Q\mathbf{e}^{tD_n}\mathbf{e}^{tN_n}Q^{-1}$.
Soit p l'indice de nilpotence de N_n, alors $\mathbf{e}^{tN_n} = \sum\limits_{k=0}^{p} \frac{t^k}{k!}N_n^k$, $\mathbf{e}^{tD_n} = \mathrm{diag}\ \left(e^{i\mu_1}, .., e^{i\mu_r}\right)$.

Si $X \in E_n$ alors $X = \begin{pmatrix} 0 \\ X_n \end{pmatrix}$ et $e^{tA}X = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{e}^{tA_n}X_n \end{pmatrix}$.

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{tA_n}X_n &= Q\mathbf{e}^{tN_n}\mathbf{e}^{tD_n}Q^{-1}X_n \\ &= \sum_{k=0}^{p}\frac{t^k}{k!}\left(QN_n^k\mathbf{e}^{tD_n}Q^{-1}X_n\right) \end{aligned}$$

comme $\left\|QN_n^k\mathbf{e}^{tD_n}Q^{-1}X_n\right\| = O(1)$ et $\left|t^k\right| = O(\ (1+|t|)^p)$ (*selon* $|t| \geq 1$ *ou* $|t| \leq 1$) donc il existe $C > 0$

$$\left\|\mathbf{e}^{tA}X\right\| \leq C\left((1+|t|)^p\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Réciproquement , si $X = \begin{pmatrix} X_s \\ X_i \\ X_n \end{pmatrix}$ et $\left\|\mathbf{e}^{tA}X\right\| \leq ((1+|t|)^p)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

On a $A = P\operatorname{diag}(A_s, A_i, A_n)P^{-1}$ ave A_k est la matrice de la restriction u à E_k pour $k \in \{s, i, n\}$ et $P = \operatorname{diag}(P_s, P_i, P_n)$. Donc

$$\left\|\mathbf{e}^{t\operatorname{diag}(A_s,A_i,A_n)}P^{-1}X\right\| \leqslant C'\left(1+|t|^p\right)$$

et

$$\left\|\mathbf{e}^{tA_s}P_s^{-1}X_s\right\| \leqslant C'\left(1+|t|^p\right)$$

L décomposition de Dunford de A_s donne

$$\mathbf{e}^{tA_s}X_s = \sum_{k=0}^{p}\frac{t^k}{k!}\left(QN_s^k\mathbf{e}^{tD_n}Q^{-1}X_s\right)$$

Si $X_s \neq 0$, comme $\max\limits_{\lambda \in Sp(A_s)} \operatorname{Re}(\lambda) < 0$ alors $\left\|\mathbf{e}^{tA_s}P_s^{-1}X_s\right\| \sim c|t|^q e^{-\beta t}$ avec $c >$, $\beta > 0$ et $q \leq p$, ce qui donne une contradiction quand $t \to -\infty$ donc $X_s = 0$. De même on montre $X_i = 0$. D'où le résultat .