Equations différentielles linéaires

I) Équation différentielle linéaire du premier ordre

1) Généralités

Définitions :

I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient A, B et C trois fonctions continues définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est de la forme :

$$(E)\ :\ Ay' + By = C$$

2) On appelle solution sur I de l'équation différentielle (E) tout fonction f dérivable sur I et vérifiant

$$\forall x \in I,\ A(x)f'(x) + B(x)f(x) = C(x)$$

3) L'équation différentielle (E) est dite homogène (ou sans second membre) si la fonction C est nulle.

4) L'équation homogène associée à l'équation différentielle (E) est

$$(H)\ :\ Ay' + By = 0$$

NB :

1) Si la fonction A ne s'annule pas sur I, alors l'équation différentielle (E) est équivalente à une équation différentielle de la forme :

$$y' + ay = b$$

où a et b deux fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2) C'est cette forme d'équations qu'on étudiera.

2) Forme générale des solutions

Proposition :

La solution générale de l'équation différentielle $(E):\ y'+ay = b$ est la somme d'une solution particulière de (E) et la solution générale de $(H):\ y'+ay = 0$; l'équation homogène associée.

Pratique de la résolution de l'équa diff $(E):\ y' + ay = b$:

1) On commence par résoudre $(H):\ y' + ay = 0$; l'équation homogène associée.

2) On cherche une solution particulière de $(E):\ y' + ay = b$.

3) Pour la solution générale de (E) : on somme les deux.

3) Résolution de l'équation homogène

Proposition :

Soit A une primitive de la fonction a.
Les solutions de l'équation homogène $(H): \ y' + ay = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$, où λ est une constante (de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

4) Déterminantion d'une solution particulière de l'équation complète

Méthode de variation de la constante :

Pour rechercher une solution particulière de l'équation complète
$(E): \ y' + ay = b$, on utilise souvent la méthode de variation de la constante, qui consiste à chercher une solution sous la forme $\lambda(x)e^{-A(x)}$ où $\lambda(x)$ est une fonction à déterminer.
Elle vérifie $\lambda(x) = \displaystyle\int b(x)e^{A(x)}dx$

(càd : λ est une primitive de la fonction $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$)

5) Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy

Proposition :

Pour tout $x_0 \in I$ et tout $y_0 \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) $y' + a(x)y = b(x)$ vérifiant $y(x_0) = y_0$.

6) Principe de superposition de solutions

Proposition :

Si $\begin{cases} y_1 \textit{ est une solution de } : \ y' + a(x)y = b_1(x) \\ y_2 \textit{ est une solution de } : \ y' + a(x)y = b_2(x) \end{cases}$

Alors $(\alpha y_1 + \beta y_2)$ *est une solution de* : $y' + a(x)y = \alpha b_1(x) + \beta b_2(x)$

II) Équation différentielle linéaire du second ordre

1) Généralités

Définitions :

I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient A, B, C et D quatre fonctions continues définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
1) Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est de la forme :

$$(E) \ : \ Ay'' + By' + Cy = D$$

2) On appelle solution sur I de l'équation différentielle (E) tout fonction f deux fois dérivable sur I et vérifiant

$$\forall x \in I, \ A(x)f''(x) + B(x)f'(x) + C(x)f(x) = D(x)$$

3) L'équation différentielle (E) est dite homogène (ou sans second membre) si la fonction D est nulle.
4) L'équation homogène associée à l'équation différentielle (E) est

$$(H) \ : \ Ay'' + By' + Cy = 0$$

5) Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coéfficients constants est de la forme :

$$(E)\ :\ ay'' + by' + cy = f(x)$$

où a ,b et c sont des scalaires (avec $a \neq 0$) et f est une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

NB :

Ce sont les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coéfficients constants qu'on étudiera.

2) Forme générale des solutions

Proposition :

La solution générale de l'équation différentielle $(E)\ :\ ay'' + by' + cy = f(x)$ est la somme d'une solution particulière de (E) et la solution générale de $(H):\ ay'' + by' + cy = 0$; l'équation homogène associée.

Pratique de la résolution de l'équa diff $(E)\ :\ ay'' + by' + cy = f(x)$:

1) On commence par résoudre $(H):\ ay''+by'+cy = 0$; l'équation homogène associée.
2) On cherche une solution particulière de $(E)\ :\ ay'' + by' + cy = f(x)$.
3) Pour la solution générale de (E) : on somme les deux.

3) Résolution de l'équation homogène $(H):\ ay'' + by' + cy = 0$

i) **Résolution de l'équation homogène, cas complexe :**
Soit $(E_c):\ ar^2 + br + c = 0$ l'équation caractéristique associée.
A) Si l'équation caractéristique (E_c) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 (càd $\Delta \neq 0$), alors les solutions de l'équation homogène (H) sont de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$$

où λ et $\mu \in \mathbb{C}$.
B) Si l'équation caractéristique (E_c) admet une racine double r_1 (càd $\Delta = 0$), alors les solutions de l'équation homogène (H) sont de la forme :

$$x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{r_1 x}$$

où λ et $\mu \in \mathbb{C}$.

ii) **Résolution de l'équation homogène, cas réel :**
Soit $(E_c):\ ar^2 + br + c = 0$ l'équation caractéristique associée.
a,b et c étant des réesls.
A) Si l'équation caractéristique (E_c) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 (càd $\Delta \succ 0$), alors les solutions de l'équation homogène (H) sont de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$$

où λ et $\mu \in \mathbb{R}$.
B) Si l'équation caractéristique (E_c) admet une racine double r_1 (càd

$\Delta = 0$), alors les solutions de l'équation homogène (H) sont de la forme :

$$x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{r_1 x}$$

où λ et $\mu \in \mathbb{R}$.

C) Si l'équation caractéristique (E_c) admet deux racines complexes conjuguées, $\alpha \pm \beta i$ (càd $\Delta \prec 0$), alors les solutions de l'équation homogène (H) sont de la forme :

$$x \mapsto e^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))$$

où λ et $\mu \in \mathbb{R}$.

4) Détermination d'une solution particulière de l'équation complète (E)

(E) : a y" + b y'+ c y = f(x)

(E_c) : $ar^2 + br + c = 0$ l'équation caractéristique associée.

i) **Cas où** $f(x) = Ae^{\lambda x}$

Trois cas à distinguer :

Cas 1 : Si λ n'est pas une racine de (E_c) :
On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = Ce^{\lambda x}$ où C est une constante à déterminer.

Cas 2 : Si λ est une racine simple de (E_c)
On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = Cxe^{\lambda x}$ où C est une constante à déterminer.

Cas 3 : Si λ est une racine double de (E_c)
On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = Cx^2e^{\lambda x}$ où C est une constante à déterminer.

ii) $f(x) = A\cos(\omega x)$ **ou** $f(x) = A\sin(\omega x)$ **ou** $f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$

(E) : a y" + b y'+ c y = f(x)

(E_c) : $ar^2 + br + c = 0$ l'équation caractéristique associée.

On cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = x^p(C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x))$$

C et D étant deux constantes à déterminer, et p donné par :

Si	Alors
$i\omega$ n'est pas une racine de (E_c)	**p=0**
$i\omega$ est une racine simple de (E_c)	**p=1**
$i\omega$ est une racine double de (E_c)	**p=2**

5) Cas général : Méthode de variation des constantes (ou méthode de Lagrange)

(E) : a y" + b y'+ c y = f(x)

La solution générale de l'équation homogène est de la forme
$y_H(x) = \lambda\varphi + \mu\psi$; où λ et μ deux constantes.

La méthode de variation des constantes :

On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = \lambda\varphi + \mu\psi$; où λ et μ sont cette fois-ci deux fonctions vérifiant $\begin{cases} \lambda'\varphi + \mu'\psi & = & 0 \\ \lambda'\varphi' + \mu'\psi' & = & f \end{cases}$

6) Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy

Proposition :

Pour tout $x_0 \in I$ et tout $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) : $ay'' + by' + cy = f(x)$ vérifiant
$y(x_0) = y_0, \ et \ y'(x_0) = y_1$.

7) Principe de superposition de solutions

Proposition :

Si $\begin{cases} y_1 \ est \ une \ solution \ de \ : \ ay'' + by' + cy = b_1(x) \\ y_2 \ est \ une \ solution \ de \ : \ ay'' + by' + cy = b_2(x) \end{cases}$

Alors $(\alpha y_1 + \beta y_2)$ *est une solution de* : $ay'' + by' + cy = \alpha b_1(x) + \beta b_2(x)$

Fin résumé