Correction

Partie I

1.a U_n est un polynôme unitaire de degré $2n$ donc $U_n^{(n)}$ est un polynôme de degré n de coefficient dominant $\frac{(2n)!}{n!}$. Par suite P_n est un polynôme unitaire de degré n.

1.b La famille $\mathcal{B}$ est une famille de polynôme de degrés étagés.

2.a Par la formule de Leibniz :

$$\left((X^2-1)^n\right)^{(n)} = \left((X-1)^n(X+1)^n\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((X-1)^n\right)^{(k)}\left((X+1)^n\right)^{(n-k)}$$

puis $\left((X^2-1)^n\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(X-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}(X+1)^k = n!\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k$

et enfin $P_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k$.

2.b $(X-1)^{n-k}$ s'annule en 1 sauf quand $k=n$ donc $P_n(1) = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}$. De même $P_n(-1) = \frac{(-2)^n}{\binom{2n}{n}}$.

3.a $U_n = (X-1)^n(X+1)^n$.
Les racines de U_n sont 1 et -1, elles sont de multiplicité n.

3.b La fonction $x \mapsto U_n(x)$ est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et s'annule en 1 et -1 donc par le théorème de Rolle, $\exists \alpha \in]-1,1[$ tel que $U_n'(\alpha) = 0$.
Or U_n' s'annule aussi en 1 et -1 car ce sont ici les racines de U_n de multiplicité n.
En appliquant le théorème de Rolle sur $[-1,\alpha]$ et sur $[\alpha,1]$, on obtient deux réels distincts $\beta \in]-1,\alpha[$ et $\gamma \in]\alpha,1[$ annulant U_n''. Or U_n'' s'annule aussi en 1 et -1 et on peut reprendre le processus...
A terme, on observe que $U_n^{(n)}$, tout comme P_n, s'annule au moins n fois dans l'intervalle $]-1,1[$.

3.c Puisque le polynôme P_n est de degré n, il possède au plus n racines (comptées avec multiplicité).
Comme ci-dessus nous venons d'en obtenir n, on peut affirmer qu'il n'y en a pas d'autres et que celles-ci sont simples.

4.a Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
Pour $n = 0$, on reconnaît la formule d'intégration par parties.
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}P^{(n+2)}(t)Q(t)\mathrm{d}t &\underset{HR}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[P^{(n+1-k)}(t)Q^{(k)}(t)\right]_{-1}^{1} + (-1)^{n+1}\int_{-1}^{1}P'(t)Q^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\\ &\underset{\text{ipp}}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[P^{(n+1-k)}(t)Q^{(k)}(t)\right]_{-1}^{1} + (-1)^{n+1}\left[P(t)Q^{(n+1)}(t)\right]_{-1}^{1}(-1)^{n+2}\int_{-1}^{1}P(t)Q^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\left[P^{(n+1-k)}(t)Q^{(k)}(t)\right]_{-1}^{1} + (-1)^{n+2}\int_{-1}^{1}P(t)Q^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Récurrence établie.

4.b $\int_{-1}^{1}P_{n+1}(t)Q(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}U_{n+1}^{(n+1)}(t)Q(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[U_{n+1}^{(n-k)}(t)Q^{(k)}(t)\right]_{-1}^{1} + (-1)^{n+1}\int_{-1}^{1}U_{n+1}(t)Q^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$

Or $Q^{(n+1)}(t) = 0$ et $U_{n+1}^{(n-k)}(\pm 1) = 0$ car 1 et -1 sont racines de multiplicité $n+1$ de U_{n+1}.

Ainsi $\int_{-1}^{1}P_{n+1}(t)Q(t)\mathrm{d}t = 0$.

Partie II

1.a Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $P,Q\in\mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P+\mu Q)&=\left((\lambda P+\mu Q)(a_i)\right)_{0\le i\le n}=\left(\lambda P(a_i)+\mu Q(a_i)\right)_{0\le i\le n}\\&=\lambda\left(P(a_i)\right)_{0\le i\le n}+\mu\left(Q(a_i)\right)_{0\le i\le n}=\lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q)\end{aligned}$$

Ainsi φ est linéaire.

Soit $P\in\ker\varphi$. On a $P(a_0)=\ldots=P(a_n)=0$ donc P possède au moins $n+1$ racines.

Or $\deg P\le n$ donc $P=0$. Ainsi $\ker\varphi=\{0\}$.

Par le théorème d'isomorphisme ($\dim\mathbb{R}_n[X]=\dim\mathbb{R}^{n+1}<+\infty$) φ est un isomorphisme.

1.b P est solution du problème posé ssi $\varphi(P)=\left(f(a_0),\ldots,f(a_n)\right)$.

φ étant bijective, le problème posé possède une unique solution $P_f=\varphi^{-1}\left(f(a_0),\ldots,f(a_n)\right)$.

2.a Si $j\ne i$ alors $L_i(a_j)=0$. Si $j=i$ alors $L_i(a_i)=\prod_{\substack{k=0\\k\ne i}}^{n}(a_i-a_k)\ne 0$.

2.b Supposons $\lambda_0L_0+\cdots+\lambda_nL_n=0$.

$\forall 0\le i\le n$, en évaluant la relation précédente en a_i : $\lambda_iL_i(a_i)=0$, or $L_i(a_i)\ne 0$, donc $\lambda_i=0$.

La famille $\mathcal{C}$ est une famille libre de $n+1=\dim\mathbb{R}_{n+1}[X]$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ (car $\deg L_i=n$), c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.c En évaluant la relation $P_f=\sum_{j=0}^{n}\lambda_jL_j$ en a_i on obtient :

$P_f(a_i)=\lambda_iL_i(a_i)$ or $P_f(a_i)=f(a_i)$ donc $\lambda_i=\dfrac{f(a_i)}{L_i(a_i)}$.

3.a $J(f)=\int_{-1}^{1}P_f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\sum_{i=0}^{n}\lambda_iL_i(t)\mathrm{d}t=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\int_{-1}^{1}L_i(t)\mathrm{d}t=\sum_{i=0}^{n}\mu_if(a_i)$ avec $\mu_i=\dfrac{1}{L_i(a_i)}\int_{-1}^{1}L_i(t)\mathrm{d}t$.

3.b Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $f,g\in\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$.

$$J(\alpha f+\beta g)=\sum_{i=0}^{n}\mu_i(\alpha f+\beta g)(a_i)=\sum_{i=0}^{n}\mu_i(\alpha f(a_i)+\beta g(a_i))=\alpha\sum_{i=0}^{n}\mu_if(a_i)+\beta\sum_{i=0}^{n}\mu_ig(a_i)$$

puis $J(\alpha f+\beta g)=\alpha J(f)+\beta J(g)$ donc J est linéaire. De plus J est à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est donc une forme linéaire.

3.c Si $f\in\mathbb{R}_n[X]$ alors $P_f=f$ et par suite $J(f)=I(f)$.

3.d Si $f\in\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ alors réalisons la division euclidienne de f par P_{n+1} :

$f=P_{n+1}Q+R$ avec $\deg R<\deg P_{n+1}$ d'où $R\in\mathbb{R}_n[X]$.

En évaluant la relation ci-dessus en a_i on obtient $f(a_i)=R(a_i)$ car $P_{n+1}(a_i)=0$.

Par suite $P_f=R$ et donc, en exploitant de surcroît I.4.b :

$$I(f)=I(P_{n+1}Q+R)=\int_{-1}^{1}P_{n+1}(t)Q(t)\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1}R(t)\mathrm{d}t=0+\int_{-1}^{1}P_f(t)\mathrm{d}t=J(f).$$

3.e $L_i^2\in\mathbb{R}_{2n}[X]\subset\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ donc $I(L_i^2)=J(L_i^2)$.

Or $J(L_i^2)=\mu_iL_i^2(a_i)$ et $I(L_i^2)>0$ (par intégration d'une fonction continue, positive non nulle).

Par suite $\mu_i=\dfrac{I(L_i^2)}{L_i^2(a_i)}>0$.

4.a $T_{2n+1}(f)(t)=\sum_{k=0}^{2n+1}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k$.

4.b L'inégalité de Taylor Lagrange donne $\forall t \in [-1,1], |f(t) - T_{2n+1}(f)(t)| \leq \frac{Mt^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

$$|I(f) - I(T_{2n+1}(f))(t)| \leq \int_{-1}^{1} |f(t) - T_{2n+1}(f)(t)| \mathrm{d}t = \frac{M}{(2n+2)!} \int_{-1}^{1} |t^{2n+2}| \mathrm{d}t = \frac{2M}{(2n+3)!}.$$

4.c Puisque les μ_i sont positifs, on a la propriété $f \leq g \Rightarrow J(f) \leq J(g)$.

$f(t) - T_{2n+1}(f)(t) \leq \frac{M|t^{2n+2}|}{(2n+2)!} \leq \frac{M}{(2n+2)!}$ donc $J(f) - J(T_{2n+1}(f)) \leq \frac{2M}{(2n+2)!}$

car la fonction $t \mapsto \frac{M}{(2n+2)!}$ étant constante $J\left(\frac{M}{(2n+2)!}\right) = I\left(\frac{M}{(2n+2)!}\right) = \frac{2M}{(2n+2)!}$.

De même $J(T_{2n+1}(f)) - J(f) \leq \frac{2M}{(2n+2)!}$ et donc $|J(f) - J(T_{2n+1}(f))| \leq \frac{2M}{(2n+2)!}$.

4.d Notons $J(T_{2n+1}(f)) = I(T_{2n+1}(f))$ car $T_{2n+1}(f) \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$.

$$|I(f) - J(f)| \leq |I(f) - I(T_{2n+1}(f))| + |J(T_{2n+1}(f)) - J(f)| \leq \frac{2M}{(2n+3)!} + \frac{2M}{(2n+2)!} = \frac{4(n+2)M}{(2n+3)!}.$$