Ex 1

($\Leftarrow$) Evident

($\Longrightarrow$) Soit $x \in E$. M.q. $\|x\|_1 = \|x\|_2$.

Si $x = 0$, c'est OK

Soit $x \in E \setminus \{0\}$.

On a $\dfrac{x}{\|x\|_1} \in B_1$ $\left(\left\| \dfrac{x}{\|x\|_1} \right\| = 1 \leq 1 \right)$

$\Rightarrow \dfrac{x}{\|x\|_1} \in B_2$

$\Rightarrow \left\| \dfrac{x}{\|x\|_1} \right\|_2 = \dfrac{1}{\|x\|_1} \cdot \|x\|_2 \leq 1$

$\Rightarrow \boxed{\|x\|_2 \leq \|x\|_1}$

On obtient de même $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$

D'où $\|x\|_1 = \|x\|_2$

Ex 2

Montrer que $0 \in \overline{GL_n(\mathbb{K})}$:

On a : $0 = \lim\limits_{p \to +\infty} \left(\dfrac{1}{p} \cdot I_n \right)$ et $\left(\dfrac{1}{p} \cdot I_n \right)_{p \in \mathbb{N}^*}$

suite à valeurs dans $GL_n(\mathbb{K})$

D'où $0 \in \overline{GL_n(\mathbb{K})}$

Exercice 3

E evn et F sev de E. M.que :

1°) (F est un ouvert de E) $\Leftrightarrow E = F$

2°) $\mathring{F} \neq \emptyset \Leftrightarrow E = F$

Sol :

1°) ($\Leftarrow$) OK

($\Rightarrow$) $0 \in F \Rightarrow \boxed{\exists r > 0 / B(0,r) \subset F}$

M.que $E \subset F$:

Soit $x \in E \setminus \{0\}$, on a $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$

$$\Rightarrow \left\| \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{r}{2} < r$$

$$\Rightarrow \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|} \in B(0,r) \subset F$$

$$\Rightarrow \frac{r}{2\|x\|} \cdot x \in F$$

$$\Rightarrow \boxed{x \in F} \quad (F \text{ sev})$$

d'où $E \subset F$.

or $F \subset E$ alors $\boxed{E = F}$

2°) $\mathring{F} \neq \emptyset \iff E = F$, en effet

($\Leftarrow$) Supp $E = F$

$\Rightarrow \mathring{F} = \mathring{E} = E$ (car E ouvert) et donc $\neq \emptyset$

($\Rightarrow$) Supp. que $\mathring{F} \neq \emptyset$ et m.q. $E = F$;

On a bien $F \subset E$. On montrera donc seulement que $E \subset F$:

Soit alors $x \in E \setminus \{0\}$, m.que $x \in F$:

On a : $\mathring{F} \neq \emptyset \Rightarrow \mathring{F}$ contient un élément a.

$a \in \mathring{F} \Rightarrow (\exists r > 0,\ B(a,r) \subset F)$

On a : $\|y - a\| < r \Rightarrow y \in F$

Piste 1 :

$\|y\| < r \Rightarrow (y + a) \in F$

$\Rightarrow y \in F$ (F sev et $a \in \mathring{F} \subset F$)

Ainsi $\|y\| < r \Rightarrow y \in F$

et on continue comme dans 1°)

Piste 2 :

On a $\left\|\left(\frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|} + a\right) - a\right\| = \frac{r}{2} < r \Rightarrow \left(\frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|} + a\right) \in F$

$\Rightarrow \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|} \in F$ $\left(\begin{array}{c} a \in F \\ \text{et} \\ F \text{ sev} \end{array}\right)$

$\Rightarrow x \in F$

Fin Ex 3

Exercice : 4

Montrer que $\mathbb{Z}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$ par trois méthodes ;

1°) $\mathbb{Z}^c$ ouvert de $\mathbb{R}$

2°) Via la caractérisation séquentielle des fermés

3°) $\mathbb{Z}$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue.

Sol :

1°) $\mathbb{Z}^c = \bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}}]k,k+1[$ ouvert comme réunion d'ouverts.

2°) Soit $(x_n)_n \subset \mathbb{Z}$ une suite convergente vers x.

M.que $x \in \mathbb{Z}$:

On a $\lim_n (x_{n+1} - x_n) = 0$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |\overbrace{\underbrace{x_{n+1} - x_n}_{\in\mathbb{N}}}^{\in\mathbb{Z}}| \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \forall n \geq N,\ x_{n+1} = x_n$, et donc $(\forall n \geq N, x_n = x_N)$

D'où $\boxed{\lim_n x_n = x_N \in \mathbb{Z}} \Rightarrow \boxed{x \in \mathbb{Z}}$

3°) On sait par exemple que : $\left(e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta \in 2\pi\mathbb{Z}\right)$

Posons $f : t \longmapsto e^{2\pi t i}$; f est bien continue sur $\mathbb{R}$

et $f(t) = 1 \Leftrightarrow t \in \mathbb{Z}$ d'après

càd $\mathbb{Z} = f^{-1}(\{1\})$, image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'applic continue f.

Ou encore, via : $\boxed{\sin x = 0 \iff x \in \pi\mathbb{Z}}$

On a : $\sin(\pi t) = 0 \iff t \in \mathbb{Z}$

Posons $f : t \mapsto \sin(\pi t)$, f est continue sur $\mathbb{R}$

et $f(t) = 0 \iff t \in \mathbb{Z}$

c.à.d $\boxed{\mathbb{Z} = f^{-1}(\{0\})}$, $\mathbb{Z}$ est donc

fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue f.

Fin Ex 4

Ex 5

Supp. que F sev de E et m.q. $\overline{F}$ est un sev de E.

1°) $0 \in \overline{F}$ car $0 \in F \subset \overline{F}$

2°) Soient $x, y \in \overline{F}$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

m.q. $\alpha x + y \in \overline{F}$:

$x, y \in \overline{F} \Rightarrow \exists (x_n)_n \subset F$ et $(y_n)_n \subset F$ t.q. $\begin{cases} \lim_n x_n = x \\ \lim_n y_n = y \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha x + y = \lim_n (\alpha x_n + y_n) \in \overline{F}$ (car : $\forall n$, $\alpha x_n + y_n \in F$)

Fin Ex 5

Exo 6 :

E evn et A une partie convexe de E.
Montrer que $\bar{A}$ et $\mathring{A}$ sont des parties convexes de E.

Sol :

A convexe $\Longleftrightarrow \left(\forall x, y \in A, \forall t \in [0,1], tx+(1-t)y \in A\right)$

1°) $\bar{A}$ est convexe :

Soient $x, y \in \bar{A}$. Soit $t \in [0,1]$. M.q. $tx+(1-t)y \in \bar{A}$

$$\exists (x_n)_n \subset A \text{ et } (y_n)_n \subset A \text{ tq } \begin{cases} \lim_n x_n = x \\ \lim_n y_n = y \end{cases}.$$

$$\Longrightarrow tx+(1-t)y = \lim_n \left(tx_n+(1-t)y_n\right) \in \bar{A}$$

(car : $\left(\forall n, tx_n+(1-t)y_n \in A\right)$, parce que A convexe et que x_n et $y_n \in A$

2°) $\mathring{A}$ est un convexe ; en effet :

Soient $x, y \in \mathring{A}$. Soit $t \in [0,1]$. M.q. $\boxed{tx+(1-t)y \in \mathring{A}}$

$$x, y \in \mathring{A} \Longrightarrow \begin{cases} \exists r_1 > 0,\ B(x, r_1) \subset A \\ \exists r_2 > 0,\ B(y, r_2) \subset A \end{cases}$$

Pour terminer, reste à déterminer $r > 0$ tel que :

$$B\left(tx+(1-t)y \,;\, r\right) \subset A$$

Posons : $r = \min(r_1, r_2)$, Ainsi : $\begin{cases} B(x, r) \subset B(x, r_1) \subset A \\ B(y, r) \subset B(y, r_2) \subset A \end{cases}$

On a : $B(tx + (1-t)y\ , r) \subset A$: En effet :

Supposons que $\| z - (tx + (1-t)y) \| < r$ et m.q. $\boxed{z \in A.}$

On sait que : $\begin{cases} \|z - x\| < r \Rightarrow z \in A \quad (B(x, r) \subset A) \\ \|z - y\| < r \Rightarrow z \in A \quad (B(y, r) \subset A) \end{cases}$

On a $\|z - tx - (1-t)y\| = \|(z - tx + ty) - y\| < r \Rightarrow (z - tx + ty) \in A$

et de même $\|z - tx - (1-t)y\| = \|(z + (1-t)x - (1-t)y) - x\| < r \Rightarrow z + (1-t)x - (1-t)y \in A$

et A Convexe $\Rightarrow \underbrace{\left((1-t)\cdot(z - tx + ty) + t\cdot(z + (1-t)x - (1-t)y)\right)}_{= z} \in A$

$\Rightarrow \boxed{z \in A}$ CQFD

Fin Ex 6

Ex 7

i) $\|f\|_A \leq \|f\|_{\bar{A}}$; En effet

$\{\|f(x)\| \,/\, x \in A\} \subset \{\|f(x)\| \,/\, x \in \bar{A}\}$, car $A \subset \bar{A}$

$$\Rightarrow \underbrace{\sup(\{\|f(x)\| \,/\, x \in A\})}_{=\|f\|_A} \leq \underbrace{\sup(\{\|f(x)\| \,/\, x \in \bar{A}\})}_{=\|f\|_{\bar{A}}}$$

ii) $\|f\|_{\bar{A}} \leq \|f\|_A$, En effet :

On veut m. que : $\sup(\{\|f(x)\| \,/\, x \in \bar{A}\}) \leq \|f\|_A$.

Il suffit de m. que $\|f\|_A$ est un majorant de $\{\|f(x)\| \,/\, x \in \bar{A}\}$.

Soit $x \in \bar{A}$. M. que $\|f(x)\| \leq \|f\|_A$?

On a $x \in \bar{A} \Rightarrow (\exists (x_n)_n \subset A$ tq que $\lim_n x_n = x)$

Et On a : $(\forall n \in \mathbb{N}, \|f(x_n)\| \leq \|f\|_A)$ car $x_n \in A$ Ω

et l'application $t \longmapsto \|f(t)\|$ continue sur E

comme composée des applic continues f et $\|\cdot\|$.

Ainsi, $\lim_n x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|f(x_n)\| = \|f(x)\|$

et par passage à la limite dans Ω, on tire que :

$$\|f(x)\| \leq \|f\|_A$$

CQFD

Fin Ex 7

Exo 8

M. que $GL_n(\mathbb{K})$ est une partie dense de $M_n(\mathbb{K})$.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

M. que A est la limite d'une suite de matrices **inversibles**.

Rappel : $\boxed{(A - \lambda I_n) \in GL_n(\mathbb{R}) \iff \lambda \notin Sp(A)}$

($\exists r > 0$ tel que sur $]0, r[$, il n'y a aucune valeur propre de A.)

$$\left(\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} = 0\right) \Rightarrow \left(\exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \geq N,\ 0 < \frac{1}{k} < r\right)$$

$\Rightarrow$ ($\forall k \geq N$, $\frac{1}{k}$ n'est pas une valeur propre de A.)

$$\Longrightarrow \begin{cases} \forall k \geq N,\ \left(A - \frac{1}{k} \cdot I_n\right) \in GL_n(\mathbb{K}) \\ \lim\limits_{k \to +\infty} \left(A - \frac{1}{k} \cdot I_n\right) = A \end{cases}$$

Fin Ex 8

Ex 9

M. que H est soit un fermé de E, soit une partie dense.

C.à.d M. que $(\overline{H} = H$ ou $\overline{H} = E)$

Supp. que $\overline{H} \neq H$ et m. que $\overline{H} = E$:

H hyperplan de $E \overset{\text{déf}}{\iff} (\exists a \in E,\ E = H \oplus \operatorname{Vect}(a))$

Il s'agit de m. que $E \subset \overline{H}$ ($\overline{H} \subset E$ est évident).

or $\overline{H}$ est un sev de E (simple à vérifier)

et que $H \subset \overline{H}$, alors il suffit de vérifier que :

$$a \in \overline{H}$$

On a $\overline{H} \neq H \implies H \subsetneq \overline{H}$ (inclus strictement)

$$\implies (\exists\, b \in \overline{H} \text{ tel que } b \notin H)$$

D'autre part, il existe $b_H \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que

$$b = b_H + \lambda . a \text{, car } E = H \oplus \operatorname{Vect}(a)$$

$b \notin H \implies \lambda \neq 0$.

et on a $\lambda a = b - b_H \in \overline{H}$, car $\begin{cases} \overline{H} \text{ sev} \\ b \text{ et } b_H \in \overline{H} \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} \overline{H} \text{ sev} \\ \lambda a \in \overline{H} \\ \lambda \neq 0 \end{pmatrix} \implies \boxed{a \in \overline{H}} \text{ (QFD)}$$

Fin Ex 9

Exo : 10

1. que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$

Sol : Il s'agit de m. que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé borné de $M_n(\mathbb{R})$, puisqu'on est en dimension finie.

$$O_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, {}^tA.A = I_n \}$$

1°) $O_n(\mathbb{R}) = \phi^{-1}(\underbrace{\{I_n\}}_{\text{fermé}})$ avec $\phi(A) = {}^tA.A$

$A \mapsto ({}^tA, A)$ continue (car $\begin{pmatrix} A \longmapsto {}^tA \\ A \longmapsto A \end{pmatrix}$ continues)

et $(A, B) \mapsto AB$ continue (bilin en dim finie)

ϕ en tant que la composée de ces deux applic continues est donc continue.

D'où $\phi^{-1}(\{I_n\}) = O_n(\mathbb{R})$ fermé

2°) $\forall A \in O_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2 = \|I_n\|_2 = \sqrt{n}$

où $\|A\|_2 = \sqrt{tr({}^tA.A)}$

$\Longrightarrow$ $\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ borné}}$

Fin Ex10

Ex 11

1) $S = \{ f \in \mathcal{L}(E) \ / \ f^2 = I_E \}$.

Notons $\phi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$.

$$f \longmapsto f^2$$

On a $S = \{ f \in \mathcal{L}(E) \ / \ \phi(f) = I_E \} = \phi^{-1}(\{I_E\})$

$\{I_E\}$ est un fermé de $\mathcal{L}(E)$ (singleton)

alors il reste à justifier que ϕ est continue sur $\mathcal{L}(E)$.

ϕ est la composée des applications :

$f \mapsto (f, f)$ et $(f, g) \mapsto f \circ g$

$f \mapsto (f, f)$ est continue car linéaire en dim finie.

et $(f, g) \mapsto f \circ g$ est continue sur $(\mathcal{L}(E))^2$ car bilinéaire en dim fini

D'où ϕ est continue sur $\mathcal{L}(E)$.

CQFD

2) $\mathcal{P} = \{ f \in \mathcal{L}(E) \ / \ f^2 = f \} = \{ f \in \mathcal{L}(E) \ / \ \psi(f) = 0 \}$

où $\psi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$

$f \longmapsto f^2 - f$

Ainsi $\mathcal{P} = \psi^{-1}(\{0\})$.

$\{0\}$ est un <u>fermé</u> de $\mathcal{L}(E)$, alors pour m.que $\mathcal{P}$ est un <u>fermé</u> de $\mathcal{L}(E)$, il suffit de m.que ψ est <u>continue sur</u> $\mathcal{L}(E)$.

L'application $f \mapsto f^2$ est continue sur $\mathcal{L}(E)$; on vient de le voir dans 1).

et l'applic $f \mapsto f$ est évidemment continue sur $\mathcal{L}(E)$

D'où $f \mapsto f^2 - f$, qui est ψ est continue sur $\mathcal{L}(E)$

CQFD

Fin Ex 11

Ex 12 :

$D_n(\mathbb{C})$: l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$.

Montrer que $D_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Sol : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

M.que A est la limite d'une suite de matrices diagonalisables.

On a $\begin{cases} A = P \cdot T \cdot P^{-1} \\ \text{où } P \text{ inversible et } T \text{ triangulaire sup.} \end{cases}$

Si on arrive à montrer qu'il existe une suite $(T_k)_k$ de matrices diagonalisables telle que $\lim\limits_{k \to \infty} T_k = T$ alors c'est fini ; car $A = \lim\limits_{k \to \infty} (\underbrace{P T_k P^{-1}}_{\text{diagonalisable}})$.

Posons $T = \begin{pmatrix} t_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{pmatrix}$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose : $T_k = \begin{pmatrix} t_1 + \frac{1}{2^k} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n + \frac{n}{2^k} \end{pmatrix}$

On a bien $\lim\limits_{k \to +\infty} T_k = T$, reste à avoir que les T_k sont diagonalisables à partir d'un rang.

Il suffit de m.que les $\left(t_i + \frac{i}{2^k}\right)$ sont distincts 2 à 2 à partir d'un rang, car T_k aura n valeurs propres distinctes 2 à 2.

Soit $i \neq j$: On a $\left(t_i + \frac{i}{2^k} \neq t_j + \frac{j}{2^k} \Leftrightarrow \frac{1}{2^k} \neq \frac{t_j - t_i}{i-j} \right)$

$\left(\exists r > 0, \forall i \neq j, \frac{t_j - t_i}{i-j} \notin]0, r[\right)$

Et $\left(\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, \frac{1}{2^k} \in]0, r[\right)$ $\left(\text{car } \lim_n \frac{1}{2^k} = 0 \right)$

D'où il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left(\forall k \geq N, \forall i \neq j, \frac{1}{2^k} \neq \frac{t_j - t_i}{i-j} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\forall k \geq N, \forall i \neq j, t_i + \frac{i}{2^k} \neq t_j + \frac{j}{2^k} \right) \text{ CQFD}$$

Fin Ex 12

Ex 13

1) $\phi(A) = \chi_A(X) = \det(X I_n - A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (X \cdot \delta_{\sigma(i)i} - a_{\sigma(i)i})$

En développant, on voit que les applications composantes de ϕ dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ sont polynomiales en les coefficients de A, donc continues

D'où $\phi : A \mapsto \chi_A$ est continue sur $M_n(\mathbb{C})$

Rappel : $(I_n)_{ij} = \delta_{ij}$

2°) $\chi_{AB}(x) = \det(xI_n - AB) = \det(A\cdot(xA^{-1} - B))$

$= \det((xA^{-1} - B)\cdot A) = \det(xI_n - BA) = \chi_{BA}(x)$

3°) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. M.q. $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

On a $A = \lim_{p\to\infty} A_p$, où $(A_p)_p \subset GL_n(\mathbb{C})$ vu la densité de $GL_n(\mathbb{C})$

2°/ $\Rightarrow$ $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \chi_{A_p\cdot B} = \chi_{B\cdot A_p}}$ Σ

or $M \mapsto BM$ et $M \mapsto MB$ sont continues (lin + dim finie)

alors $\boxed{\lim_{p\to\infty} A_p\cdot B = AB \text{ et } \lim_{p\to\infty} B\cdot A_p = BA}$

D'après 1°/, ϕ est continue, alors :

$\lim_{p\to\infty} \phi(A_p\cdot B) = \phi(AB)$ et $\lim_{p\to\infty} \phi(B\cdot A_p) = \phi(BA)$

$\Longrightarrow \lim_{p\to\infty} \chi_{A_p\cdot B} = \chi_{AB}$ et $\lim \chi_{B\cdot A_p} = \chi_{BA}$

et Σ $\Rightarrow \lim_{p\to\infty} \chi_{A_p\cdot B} = \lim_{p\to\infty} \chi_{B\cdot A_p}$

D'où $\underline{\chi_{AB} = \chi_{BA}}$ CQFD

4°) On a : $P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(0)}{i!} x^i$

$$\Longrightarrow P(M) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(0)}{i!} M^i$$

Il suffit de justifier que :

$\forall\ 0 \leq i \leq n,\ (P, M) \longmapsto P^{(i)}(0) . M^i$ est continue sur $\mathbb{C}_n[X] \times M_n(\mathbb{C})$

Soit $i \in [\![0, n]\!]$. $(P, M) \longmapsto P^{(i)}(0)\, M^i$ est la composée des applications $(P, M) \longmapsto (P^{(i)}(0), M^i)$

et $(\lambda, M) \longmapsto \lambda M$.

- $(\lambda, M) \longmapsto \lambda M$ est continue sur $\mathbb{C} \times M_n(\mathbb{C})$ car bilinéaire en dim finie.
- Pour l'application $(P, M) \longrightarrow (P^{(i)}(0), M^i)$:

On vérifie que ses composantes sont continues :

i) $(P, M) \longmapsto P^{(i)}(0)$ est continue car linéaire en dim finie.

ii) $(P, M) \longmapsto M^i$ est la composée de :

$(P, M) \longmapsto M$ et $M \longmapsto M^i$

La première est continue car linéaire en dimension finie.

La deuxième : $M \mapsto M^i$ est la composée de

$M \mapsto \underbrace{(M, \dots, M)}_{i \text{ fois}}$ et $(A_1, \dots, A_i) \mapsto A_1 \cdots A_i$

La 1ère continue car lin en dim finie, et la 2ème car i-linéaire en dim finie.

5°) Montrons que pour toute matrice diagonalisable A, on a : $\chi_A(A) = 0$.

On a : $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$; $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$

⚠ $\forall Q \in \mathbb{C}[X]$, $Q(A) = P \cdot \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & Q(\lambda_n) \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$

$$\Rightarrow \chi_A(A) = P \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \underbrace{\chi_A(\lambda_1)}_{0} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{\chi_A(\lambda_n)}_{0} \end{pmatrix}}_{=0} P^{-1} = 0$$

$=0$ . .

6°) En déduisons le fameux théorème de C-Hamilton :

$$\left(\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ \chi_A(A) = 0\right)$$

Indice : Vous pouvez utiliser la densité de l'ensemble des matrices diagonalisables $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

$\Rightarrow A = \lim_{k \to \infty} A_k$, où $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suite de matrices diagonalisables.

On a : $\left(\forall k \in \mathbb{N},\ \chi_{A_k}(A_k) = 0\right)$ (d'après 5°)

$$\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} \chi_{A_k}(A_k) = 0$$

D'autre part, notons $P(A) = \Psi(P, A)$;

$\Psi : \mathbb{C}_n[X] \times M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ est continue.

Et on a : $\left(\forall k \in \mathbb{N},\ \Psi(\chi_{A_k}, A_k) = 0\right)$

et $\lim_{k \to \infty} (\chi_{A_k}, A_k) = (\chi_A, A)$ car ϕ continue en A,

D'où $\lim_{k \to \infty} \Psi(\chi_{A_k}, A_k) = \underbrace{\Psi(\chi_A, A)}_{\chi_A(A)} = 0$

$$\Rightarrow \chi_A(A) = 0$$

Fin Ex 12

Ex 14

1) $v_n \circ (u - Id) = \frac{1}{n+1}(u^{n+1} - Id)$ (OK)

2) Soit $x \in Im(u - Id) \cap Ke(u - Id)$.

M.que $x = 0$

On a $\begin{cases} u(x) = x \\ \exists t \in E,\ x = (u - Id)(t) \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N},\ v_n(x) = \left(v_n \circ (u - Id)\right)(t)\right)$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ v_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(u^{n+1}(t) - t\right)$

D'autre part, on a $u(x) = x$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ u^k(x) = x$

$$\Rightarrow v_n(x) = \frac{1}{n+1} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \underbrace{u^k(x)}_{=x}}_{=(n+1)x} = x$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x = \frac{1}{n+1}\left(u^{n+1}(t) - t\right)$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \|x\| \leq \dfrac{\|u^{n+1}(t)\| + \|t\|}{n+1}$

Or $(\forall y \in E, \|u(y)\| \leq \|y\|)$

alors $\|u^{n+1}(t)\| \leq \|t\|$

D'où $\left(\forall n \in \mathbb{N}, \|x\| \leq \dfrac{2\|t\|}{n+1}\right)$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$

on obtient : $\|x\| = 0$; c.à.d $x = 0$ / (CQFD)

3) On a $\begin{cases} \mathrm{Im}(v - I) \cap \mathrm{Ker}(v - I) = \{0\} \\ \dim \mathrm{Im}(v - I) + \dim \mathrm{Ker}(v - I) = \dim E \end{cases}$

$\Rightarrow E = \mathrm{Im}(v - I) \oplus \mathrm{Ker}(v - I)$

(Fin Ex 14) (Fin partie 2)