Ce qui est marqué en jaune est corrigé à présent.
Je corrigerai le reste après.

Suites et séries de fonctions

Exercice 1:

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(x) = x^n \ln x \text{ avec } x \in \left]0\,;1\right] \text{ et } u_n(0) = 0$$

Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ sur $[0\,;1]$.

Exercice 2:

On pose

$$u_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+$$

a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $[0\,;+\infty[$.
b) Étudier la convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$.
c) Étudier la convergence uniforme sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 3:

Soit $f_n \colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n^2 x(1-nx) \text{ si } x \in [0\,;1/n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon}$$

a) Étudier la limite simple de la suite (f_n).
b) Calculer

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ?

c) Étudier la convergence uniforme sur $[a\,;1]$ avec $a > 0$.

Exercice 4:

Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

a) Justifier que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
b) Préciser le sens de variation de S.
c) Établir

$$\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = 1/x$$

d) Donner un équivalent de S en 0.
e) Donner un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 5:

On considère la série des fonctions

$$f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

définies sur $\mathbb{R}_+$.

Étudier sa convergence simple, sa convergence normale et sa convergence uniforme.

Exercice 6:

On note 1_I la fonction caractéristique d'un intervalle I :

$$1_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur $[0\,;+\infty[$ de la série des fonctions

$$u_n(x) = \frac{1}{n+1} 1_{[n;n+1[}(x)$$

Exercice 7:

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x) = a_n x^n (1-x) \text{ avec } x \in [0\,;1]$$

a) Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.
b) Montrer que cette série converge normalement si, et seulement si, il y a convergence de la série $\sum a_n/n$.
c) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément si, et seulement si, $a_n \to 0$.

Exercice 8:

Considérons la fameuse fonction *zéta de Riemann*

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

1) Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.
2) Etudier la monotonie et la convexité de ζ.
3) Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.
4) i) Déterminer la limite de ζ en 1.
   ii) Déterminer un équivalent simple de ζ en 1.
   iii) Tracer l'allure de la courbe de ζ.
5) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(\zeta(x))$ est convexe sur $]1, +\infty[$.
   Vous pouvez appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 9:

On pose

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

Montrer que la fonction ζ_2 est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

.

Exercice 10:

Soit
$$\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right)$$

Justifier l'existence de l'intégrale suivante, et calculer-la.
$$\int_0^1 \psi(x)\,\mathrm{d}x$$

.

Exercice 11:

On pose
$$u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x \text{ pour } x \in \left]0\,;1\right] \text{ et } u_n(0) = 0$$

a) Calculer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

b) Montrer que la série des u_n converge uniformément sur $[0\,;1]$.

c) En déduire l'égalité
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

.

Exercice 12:

Ensemble de définition et continuité de
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

En trouver la limite en $+\infty$ et un équivalent en 0^+.

Exercice 13:

Pour $t > 0$, on pose $\quad S(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nt+1}$

Déterminer la limite de $S(t)$ quand $t \to 0^+$.

Exercice 14:

Soit $\quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$

a) Quel est le domaine de définition de f ?
Étudier la continuité de f sur celui-ci.

b) Montrer que f est strictement décroissante.
c) Étudier la limite de f en $+\infty$.
d) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

Exercice 15:

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n}$$

a) Justifier que la fonction $f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
b) Établir que pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) + f(1/x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

c) Établir que f est continue sur $]-1\,;1[$ puis que f est continue sur $]-\infty\,;-1[$ et $]1\,;+\infty[$.
d) Établir la continuité de f en 1.

Exercice 16:

Soit α un réel. Pour tout entier $n > 0$ et tout réel x, on pose

$$u_n(x) = \frac{n^\alpha x\,\mathrm{e}^{-nx}}{n^2+1}$$

On note I le domaine de définition de

$$S\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

a) Déterminer I.
b) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
c) A-t-on convergence normale sur $\mathbb{R}_+$?
d) On suppose $\alpha \geq 2$. Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$$

ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
La convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ est-elle uniforme sur I ?
e) Étudier la continuité de S sur I.

Exercice 17:

On suppose $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une norme $\|.\|$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $|t| < 1/\|A\|$, on pose

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^k$$

a) Montrer que f est bien définie et que $f(t) = (I - tA)^{-1}$.

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $f'(t) = A(I - tA)^{-2}$.

Exercice 18:

On suppose $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une norme notée $\|.\|$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $|t| < 1/\|A\|$ on pose

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} t^k A^k$$

a) Montrer que f est bien définie.

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que

$$(I - tA) f'(t) = A$$

Fin

Exercice 1:

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(x) = x^n \ln x \text{ avec } x \in]0\,;1] \text{ et } u_n(0) = 0$$

Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ sur $[0\,;1]$.

Solution

D'abord, si $(U_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers une fonction f sur $[0,1]$, alors elle converge simplement vers f sur $[0,1]$.

Cherchons d'abord la fonction f, sa limite simple.

Explicitons $f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$.

Soit $x \in [0,1]$. On a $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n(x)$.

$$\boxed{\begin{array}{l} U_n(x) = x^n \ln x \text{ si } x \in]0,1] \\ U_n(0) = 0 \end{array}}$$

1) Si $x \in]0,1]$

On a $(\forall n \geqslant 1,\ U_n(x) = x^n \ln x)$

D'où $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} x^n \ln(x)$

Rappel : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ si $-1 < q < 1$

a) Si $x \in]0,1[$

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to+\infty} U_n(x) \\ &= \lim_{n\to+\infty} x^n \ln(x) \\ &= 0 \quad \left(\text{car } 0 < x < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x^n = 0\right) \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\forall x \in]0,1[,\ f(x) = 0}$

b) Si $x = 1$

$$\boxed{\begin{array}{l} U_n(x) = x^n \ln x \text{ si } x \in]0,1] \\ U_n(0) = 0 \end{array}}$$

$$f(1) = \lim_{n \to +\infty} U_n(1)$$

$\boxed{f(1) = 0}$ car $(\forall n \geqslant 1,\ U_n(1) = 0)$

2) Si $x = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} U_n(x) = x^n \ln x \text{ si } x \in]0,1] \\ U_n(0) = 0 \end{array}}$$

$$f(0) = \lim_{n \to +\infty} U_n(0)$$

$\boxed{f(0) = 0}$ car $(\forall n \geqslant 1,\ U_n(0) = 0)$

Enfin : $\boxed{\forall x \in [0,1],\ f(x) = 0}$

La suite de fonctions $(U_n)_{n \geqslant 1}$ converge simplement vers 0 sur $[0,1]$.

Étudions si $(U_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément vers la fonct nulle sur $[0,1]$.

Il suffit de montrer l'existence d'une suite $(\alpha_n)_n$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \geqslant 1,\ \forall x \in [0,1],\ |U_n(x) - 0| \leqslant \alpha_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 0 \end{cases}$$

$$U_n(x) = x^n \ln x \text{ si } x \in]0,1]$$
$$U_n(0) = 0$$

C.à.d : $\begin{cases} \forall n \geq 1, \forall x \in [0,1], \ |U_n(x)| \leq \alpha_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 0 \end{cases}$

C.à.d : $\begin{cases} \forall n \geq 1, \forall x \in]0,1], \ |x^n \ln x| \leq \alpha_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 0 \end{cases}$

C.à.d : $\begin{cases} \forall n \geq 1, \forall x \in]0,1], \ -x^n \ln x \leq \alpha_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 0 \end{cases}$

Soit $n \geq 1$.

Considérons la fonction $g : x \longmapsto -x^n \ln x$, pour tout $x \in]0,1]$.

g est dérivable sur $]0,1]$, et on a :

$$\left(\forall x \in]0,1], \ g'(x) = -x^{n-1}(1 + n.\ln x)\right)$$

On a :

$$g'(x) = 0 \iff 1 + n\ln x = 0 \iff \ln x = -\frac{1}{n} \iff x = e^{-\frac{1}{n}}$$

$$g'(x) > 0 \iff 1 + n\ln x < 0 \iff \ln x < -\frac{1}{n} \iff x < e^{-\frac{1}{n}}$$

D'où le tableau de variation suivant :

x	0		$e^{-\frac{1}{n}}$		1
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	$g(e^{-\frac{1}{n}}) = \frac{1}{ne}$	$\searrow$	

D'où : $\begin{cases} \forall n \geq 1,\ \forall x \in]0,1],\ g(x) = -x^n \ln x \leq \dfrac{1}{n.e} \\ \text{et on a } \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n.e} = 0 \end{cases}$

Enfin : $\boxed{(U_n)_{n \geq 1} \text{ converge Uniformément vers la fonct nulle sur } [0,1].}$

Fin Exercice 1

Exercice 2:

On pose

$$u_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+$$

a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $[0\,;+\infty[$.

b) Étudier la convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$.

c) Étudier la convergence uniforme sur $[0\,;+\infty[$.

Solution

On pose

$$u_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+$$

a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $[0\,;+\infty[$.

Solution

Notons U la limite simple de la suite de fonctions $(U_n)_n$ sur $[0,+\infty[$.

Déterminons U.

Soit $x \in [0,+\infty[$. $U(x) = ?$

On a :

$$U(x) \underset{\text{par déf}}{=} \lim_{n\to+\infty} U_n(x)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{-nx}\sin(nx)$$

On sait que $\lim_{n\to+\infty} e^{-nx} = 0$ si $x > 0$.

Si $x \in]0,+\infty[$:

$$U(x) = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{e^{-nx}}_{\to 0}\underbrace{\sin(nx)}_{\to \text{ suite bornée}}$$

$$= 0$$

Si $x=0$

$U(0) = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{e^{-n.0}\sin(0)}_{} = 0$

$\hookrightarrow = 0$, pour tout n.

Ainsi : $\forall x \in [0,+\infty[,\ U(x) = 0$

On pose

$$u_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+$$

a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $[0\,;+\infty[$.

b) Étudier la convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$.

Solution

a) On avait montré que (U_n) CS vers 0 sur $[0,+\infty[$.

b) Soit $a>0$.

La suite de fonction (U_n) converge-t-elle uniformément vers 0 sur $[a,+\infty[$?

$\hookrightarrow$ la fct nule

Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[a,+\infty[$.

$|U_n(x) - 0| \overset{?}{\leq} \alpha_n$

$\hookrightarrow$ où α_n ne dépend pas de x, et $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n = 0$

On a :

$|U_n(x) - 0| = |e^{-nx}\sin(nx)|$

$\leq e^{-nx}$ (car $|\sin(nx)| \leq 1$)

$\leqslant e^{-na}$ (car $x \geqslant a$)

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, +\infty[, \ |U_n(x) - 0| \leqslant e^{-na}$ c'est α_n, et ne dépend pas de x

Et on a $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-na} = 0$

D'où $(U_n)_n$ converge unif vers 0 sur $[a, +\infty[$

Exercice 3:

Soit $f_n : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n^2x(1-nx) \text{ si } x \in [0\,;1/n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon}$$

a) Étudier la limite simple de la suite (f_n).

b) Calculer

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ?

c) Étudier la convergence uniforme sur $[a\,;1]$ avec $a > 0$.

Solution

Soit $f_n : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n^2x(1-nx) \text{ si } x \in [0\,;1/n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon}$$

a) Étudier la limite simple de la suite (f_n).

Solution

Notons f la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$ sur $[0,1]$.

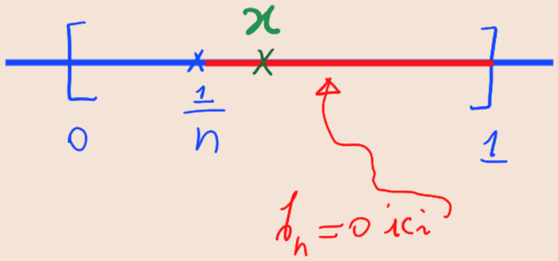
Déterminons f.

Soit $x \in [0,1]$. $f(x) = ?$

$$\boxed{f_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}}$$

On a :

$$\underbrace{f(x)}_{\text{par déf}} = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$



Si $0 < x \leq 1$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Alors $\left(\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \frac{1}{n} < x\right)$

Or $f_n = 0$ sur $\left]\frac{1}{n}, 1\right]$

Alors $f_n(x) = 0$, pour tout $n \geq N$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$

Par suite $f(x) = 0$ si $0 < x \leq 1$.

$$\boxed{f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1 - nx) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}}$$

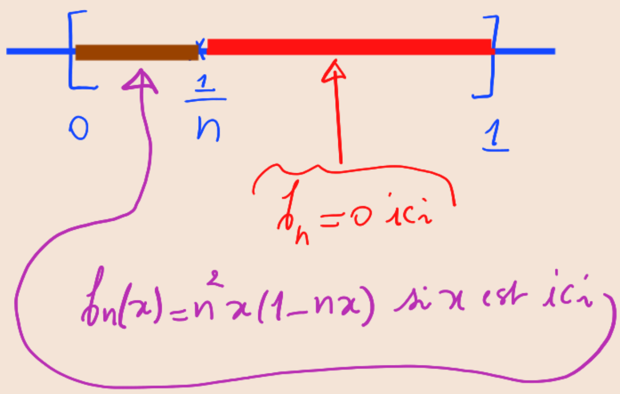
Si $x = 0$

$f(0) = ?$

$f(0) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(0)$

$\begin{cases} \forall n \geq 1,\ f_n(0) = n^2 \times 0 \times (1 - n \times 0) = 0 \\ \text{Car } 0 \leq 0 \leq \frac{1}{n} \end{cases}$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(0) = 0$



$\Longrightarrow$ $f(0)=0$

Enfin, $\boxed{f=0 \text{ sur } [0,1]}$

Exercice 4:

Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

a) Justifier que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Préciser le sens de variation de S.

c) Établir

$$\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = 1/x$$

d) Donner un équivalent de S en 0.

e) Donner un équivalent de S en $+\infty$.

Solution

$$\boxed{S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \; ; \text{ où } f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}}$$

a) Justifier que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) i) M que S est définie sur $]0,+\infty[$.

Soit $x \in]0,+\infty[$. M. que $S(x)$ existe.

On a :

$S(x)$ existe $\iff$ La somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ existe

$\iff$ La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+x}$ Converge

Ce qui est vrai car c'est une série alternée et que la suite $\left(\frac{1}{n+x}\right)_{n\geq 0}$ est décroissante de limite nulle.

D'où $S(x)$ existe. $\square$

---

a) ii) Mq que S est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \ ; \text{ où } f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}}$$

Pour montrer que S est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, il suffit de vérifier les points suivants :

α) $\forall n\geq 0$, f_n est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$

β) La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ CS sur $]0,+\infty[$.

γ) La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n'$ CU sur tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$

Pour α)

$\forall n\geq 0$, f_n est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, par opérations sur les fonctions de classes C^1.

Pour β)

La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ CS sur $]0,+\infty[$; ça veut dire que :

$$\left(\forall x\in]0,+\infty[, \text{ la série numérique } \sum_{n\geq 0} f_n(x) \text{ converge}\right)$$

Ce qu'on avait montré en a)i).

$$\boxed{f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}}$$

Pour γ)

La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ CU sur tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$?

Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$.

Montrons que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ CU sur $[a,b]$.

Il suffit de montrer la convergence normale sur $[a,b]$.

S' il existe une suite $(\alpha_n)_n$ telle que

$$\begin{pmatrix} \textbf{1)}\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in X,\ \|f_n(x)\|\leq \alpha_n \\ \textbf{2)}\ \sum_n \alpha_n \textit{ converge} \end{pmatrix}$$

Alors La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement sur X.

Rappel

Soient alors $n\geq 0$ et $x\in [a,b]$.

$$|f_n'(x)| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}\right|$$

$$= \frac{1}{(n+x)^2}$$

$$\leq \frac{1}{(n+a)^2} \quad \left(\text{car } (n+x)^2 \geq (n+a)^2 \ ;(x\geq a)\right)$$

Or $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+a)^2}$ converge car $\frac{1}{(n+a)^2} \sim \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge

Alors la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ Converge normalement sur $[a,b]$. $\square$

Enfin

$$\boxed{\begin{array}{l} S \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0,+\infty[\\ \forall x \in]0,+\infty[, \ S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2} \end{array}}$$

$\square$

---

b) Préciser le sens de variation de S.

S est de Classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \ S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+t)^2}$$

Le signe de $S'(t)$ est celui du premier terme de la somme

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+t)^2}$, soit $\frac{(-1)^1}{t^2}$, puisque c'est une série alternée

et que la suite $\left(\frac{1}{(n+t)^2}\right)_{n\geq 0}$ est décroissante de limite nulle.

D'où : $(\forall t \in]0,+\infty[, \ S'(t) \leq 0)$

et donc $\boxed{S \text{ est décroissante sur }]0,+\infty[.}$ $\square$

c) Établir

$$\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = 1/x$$

$$\boxed{S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} \text{ ; pour tout } x > 0}$$

Soit $x > 0$. On a :

$$S(x+1) + S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+x} + \frac{(-1)^n}{n+1+x} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+x} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1+x} \right)$$

$$= \frac{(-1)^0}{0+x} - \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+x} \right)}_{=0}$$

$$= \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\text{Si } (x_n)_n \text{ CV, alors: } \sum_{n=0}^{+\infty} (x_n - x_{n+1}) = x_0 - \lim_{n \to +\infty} x_n}$$

□

---

d) Donner un équivalent de S en 0.

On a : $\left(\forall x > 0, \ S(x) + S(x+1) = \frac{1}{x} \right)$

Et on a $\lim_{x \to 0} S(x+1) = S(1)$ car S continue en 1 puisque $S \in C^1(]0,+\infty[, \mathbb{R})$

Et on a $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$

D'où $\left(\frac{1}{x} - S(x+1)\right) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{x}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{S(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{x}}$$

$\square$

e) Donner un équivalent de S en $+\infty$.

On a : $\left(\forall x > 0,\ S(x) + S(x+1) = \frac{1}{x}\right)$

Et on a :

$$\forall x > 1,\quad S(x+1) \leqslant S(x) \leqslant S(x-1)$$

Car S est décroissante sur $]0,+\infty[$.

D'où : $\quad \forall x > 1,\ \underbrace{S(x) + S(x+1)}_{=\frac{1}{x}} \leqslant 2S(x) \leqslant \underbrace{S(x-1) + S(x)}_{=\frac{1}{x-1}}$

$$\Longrightarrow \quad \left(\forall x > 1,\quad \frac{1}{x} \leqslant 2S(x) \leqslant \frac{1}{x-1}\right)$$

Or $\frac{1}{x-1} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ alors $2S(x) \sim \frac{1}{x}$

Enfin : $\boxed{S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}}$

Fin Exercice 4

Exercice 5:

On considère la série des fonctions

$$f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$$

définies sur $\mathbb{R}_+$.

Étudier sa convergence simple, sa convergence normale et sa convergence uniforme.

Solution

1) Étudions la convergence simple de la série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

La série numérique $\sum_n f_n(x)$ converge-t-elle ?

Soit $n \in \mathbb{N}$.
$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$

Càd, la série $\sum_n nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ converge-t-elle ?

Cas 1 : Si $x > 0$

On a $n^2 \times \left(nx^2 e^{-x\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ (par croissance comparée)

D'où $nx^2 e^{-x\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Or $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge, alors $\sum_n nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ converge $\square$

Cas 2 : Si $x = 0$

$\sum_n nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ converge, car c'est la série nulle.

Enfin $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \sum_n f_n(x) \text{ converge}}$

D'où la convergence simple de la série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$. $\square$

2) Étudions la convergence normale de la série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

C'àd, la série positive $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty$ converge ou diverge-t-elle ?

Soit $n \geq 1$.

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Soit } n \geq 1. \\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = n x^2 e^{-x\sqrt{n}}\end{array}}$

$\|f_n\|_\infty = ?$

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)|$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left(n x^2 e^{-x\sqrt{n}}\right)$$

Ona $f_n(x) = n x^2 e^{-x\sqrt{n}}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

f_n dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$f_n'(x) = n\left(2x e^{-x\sqrt{n}} + x^2.(-\sqrt{n})\, e^{-x\sqrt{n}}\right)$$

$$= n x\, e^{-x\sqrt{n}}\left(2 - \sqrt{n}.x\right)$$

$$f_n'(x) = 0 \iff \left(x = 0 \text{ ou } x = \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$$

$$f_n'(x) > 0 \iff x\left(2 - \sqrt{n}.x\right) > 0$$

D'où le tableau de variations suivant de la fonction f_n :

$a = -\sqrt{n} < 0$

x	0		$\frac{2}{\sqrt{n}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f_n		$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	

$$f_n(x) = n x^2 e^{-x\sqrt{n}}$$

$$f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = n \cdot \frac{4}{n} \cdot e^{-\frac{2}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n}} = 4e^{-2}$$

D'où $\left(\forall n \geq 1,\ \|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left(f_n(x)\right) = 4e^{-2}\right)$

Ainsi, la série $\sum_n \|f_n\|_\infty$ diverge (grossièrement même), car $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

D'où la série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$. $\square$

3) Etudions la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

On ne peut pas utiliser la convergence normale, puisqu'elle n'est pas réalisée.

On a :

$\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

a) $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$

b) La suite de fonctions $(R_n(x))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$

où : $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$

a) est vérifiée.

Pour b) :

Soit $n \geq 1$.
$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = n x^2 e^{-x\sqrt{n}}$

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$
$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} k x^2 e^{-x\sqrt{k}}$$
$$\geq f_{n+1}(x)$$

Ainsi : $\left(\forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ R_n(x) \geq f_{n+1}(x)\right)$

D'où $\left(\forall n\geq 1,\ \sup_{x\in\mathbb{R}^+} R_n(x) \geq \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\left(f_{n+1}(x)\right)\right)$

$$\Longrightarrow \forall n \geq 1,\ \|R_n\|_\infty \geq \underbrace{\|f_{n+1}\|_\infty}_{=4e^{-2}}$$

$$\Rightarrow \forall n\geq 1,\ \|R_n\|_\infty \geq 4e^{-2} > 0$$

Par suite $\|R_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$

D'où $\boxed{\text{la suite de fonctions } (R_n(x))_{n\geq 1} \text{ ne converge pas uniformément vers } 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+.}$

Et enfin, $\boxed{\sum_{n\geq 1} f_n \text{ ne converge pas uniformément sur } \mathbb{R}^+ .}$ $\square$

Fin Exercice 5

Exercice 8 :

Considérons la fameuse fonction *zéta de Riemann*

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

1) Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

2) Etudier la monotonie et la convexité de ζ.

3) Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.

4) i) Déterminer la limite de ζ en 1.

   ii) Déterminer un équivalent simple de ζ en 1.

   iii) Tracer l'allure de la courbe de ζ.

5) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(\zeta(x))$ est convexe sur $]1, +\infty[$.
Vous pouvez appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1) Posons $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$, pour tout $n \geqslant 1$ et $x \in]1, +\infty[$.

Pour montrer que f est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$, il suffit de montrer que :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.

b) $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ CS sur $]1, +\infty[$

c) $\forall p \geqslant 1$, $\sum_{n \geqslant 1} f_n^{(p)}$ CU sur tout segment $[a, b]$ de $]1, +\infty[$.

a) est claire

b) est claire aussi ; $\sum \frac{1}{n^x}$ converge pour tout $x > 1$ car c'est une série de Riemann.

c) Soit $p \geqslant 1$. Soit $[a, b] \subset]1, +\infty[$. On a :

$\forall n \geqslant 1$, $\forall x \in [a, b]$, $f_n^{(p)}(x) = \frac{(-\ln n)^p}{n^x}$

$\Rightarrow \left(\forall n \geqslant 1, \forall x \in [a, b], |f_n^{(p)}(x)| \leqslant \frac{(\ln n)^p}{n^a} \right)$

Or $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(\ln n)^p}{n^a}$ converge, car si on prend $1 < \gamma < a$, on aura $n^\gamma \cdot \frac{(\ln n)^p}{n^a} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Et donc $\frac{(\ln n)^p}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$

et puisque $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ converge (car $\gamma > 1$)

D'où $\sum \frac{(\ln n)^p}{n^a}$ converge.

Ainsi, $\sum_{n \geq 1} f_n^{(p)}$ converge normalement, et donc converge uniformement sur $[a, b]$.

Enfin, ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$, et on a :

$$\forall p \geq 1, \ \forall x \in]1, +\infty[, \ \zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^p}{n^x}$$

2) i) Monotonie de ζ

ζ est dérivable sur $]1, +\infty[$, et pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a :

$$\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln n}{n^x} \leq 0$$

D'où ζ est décroissante sur $]1, +\infty[$.

2) ii) Convexité de ζ

ζ est 2 fois dérivable sur $]1, +\infty[$, et pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a :

$$\zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x} \geq 0$$

D'où ζ est convexe sur $]1, +\infty[$.

3) $\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = ?$

$$\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \right) \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n^x} \right)$$

Pour pouvoir intervertir, il suffit de vérifier :

a) $\forall n \geq 1,\ \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n^x} = l_n \in \mathbb{R}$

b) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ Converge uniformement sur $[2, +\infty[$.

Pour a)

Soit $n \geq 1$.

Si $n \geq 2$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n^x} = \lim_{x \to +\infty} e^{\overset{\to -\infty}{\underbrace{-x}}\,\overset{>0}{\underbrace{(\ln n)}}} = 0$$

Si $n = 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n^x} = 1$$

Pour b)

$\forall n \geq 1, \forall x \in [2, +\infty[,\ \left| \frac{1}{n^x} \right| \leq \frac{1}{n^2}$

et on a $\sum \frac{1}{n^2}$ converge $(2 > 1)$

D'où $\sum \frac{1}{n^x}$ CN, donc CU sur $[2, +\infty[$.

$$\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n^x} \right)$$

$= 1$, car $\ell_n = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n^x} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$

4) i) Déterminer la limite de ζ en 1.

Soit $x > 1$.

On a $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

$\forall n \geq 1$, $\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{n^x}$

Car $t \longmapsto \frac{1}{t^x}$ est continue et décroissante sur $[n, n+1]$.

D'où : $\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \right)}_{= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \frac{1}{x-1}} \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}}_{= \zeta(x)}$

$\Longrightarrow \left(\forall x > 1, \ \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \right)$

Or $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$

Alors $\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = 1$

ii) Déterminer un équivalent simple de ζ en 1.

Clé : On encadre $\zeta(x)$ puis on tire $\zeta(x) \underset{x \to 1}{\sim}$?

Soit $x > 1$.

On a $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

On encadre d'abord $\frac{1}{n^x}$, puis on introduit la somme $\sum_n^{+\infty}$:

$$\forall n \geqslant 2, \quad \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x}\,dt$$

Car $t \longmapsto \frac{1}{t^x}$ est continue et décroissante sur $[n-1, n]$ et sur $[n, n+1]$.

$$\Longrightarrow \begin{cases} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leqslant \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x}\,dt \right)}_{= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt = \frac{1}{x-1}} \\ \\ \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt \right)}_{= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt = \frac{1}{x-1}} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \end{cases}$$

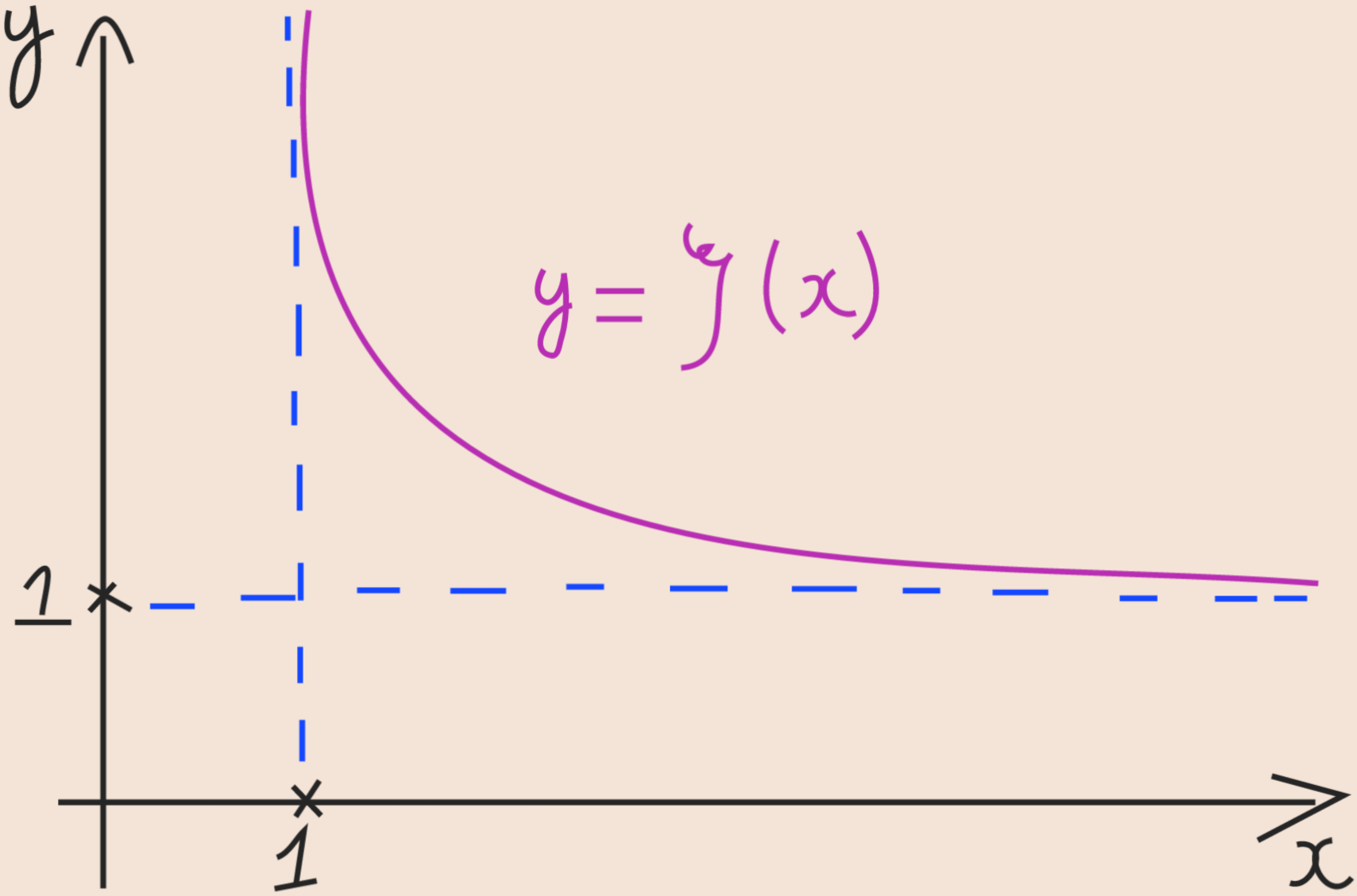
$$\Longrightarrow \quad \forall x > 1, \quad \frac{1}{x-1} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{x-1} + 1$$

Soit : $\forall x > 1, \ \frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant \frac{1}{x-1} + 1$

Or $\left(\frac{1}{x-1} + 1 \right) \underset{x \to 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$ Car $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$

Alors $\zeta(x) \underset{x \to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$

iii) Tracer l'allure de la courbe de ζ.



5) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(\zeta(x))$ est convexe sur $]1, +\infty[$.
Vous pouvez appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Considérons la fonction $h : x \mapsto \ln(\zeta(x))$.
h est bien deux fois dérivable sur $]1, +\infty[$, et on a :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \ h''(x) = \frac{\zeta''(x)\zeta(x) - (\zeta'(x))^2}{(\zeta(x))^2}$$

Alors

$$\left(h \text{ est convexe sur }]1,+\infty[\right) \Longleftrightarrow \left(\forall x\in]1,+\infty[,\ \zeta''(x)\zeta(x)-(\zeta'(x))^2 \geqslant 0\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\forall x\in]1,+\infty[,\ \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^x}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\ln n)^2}{n^x}\right)\right)$$

Soit $x>1$. Soit $N\geqslant 1$. On a :

$$\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln n}{n^x}\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n^{\frac{x}{2}}}\right)\cdot\left(\frac{\ln n}{n^{\frac{x}{2}}}\right)\right)^2$$

$$\leqslant \left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n^{\frac{x}{2}}}\right)^2\right)\times\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\ln n}{n^{\frac{x}{2}}}\right)^2\right)$$ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

Ainsi :

$$\forall N\geqslant 1,\ \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln n}{n^x}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}\right)\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{(\ln n)^2}{n^x}\right)$$

Par passage à la limite « $N\to+\infty$ », on obtient :

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^x}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\ln n)^2}{n^x}\right)$$

Fin Exercice 8

Exercice 9:

On pose

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

Montrer que la fonction ζ_2 est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

Solution

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

1) Montrons que la fonction ζ_2 est définie sur $]0,+\infty[$:

Soit $x \in]0,+\infty[$.

Il s'agit de montrer que $\zeta_2(x)$, càd $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$, existe.

Càd que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge.

Ce qui est vrai, car C'est une série alternée, et que la suite

$\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 0$, puisque $x > 0$.

$\square$

---

2) Montrons que la fonction ζ_2 est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

On a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \ \zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \quad \text{où} \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}$$

a) Soit $n \geq 1$.

$f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, par opérations sur les fonctions de classe C^1.

b) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, d'après 1°).

c) Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$.

Montrons que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$.

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

$$f_n'(x) = \left(\frac{(-1)^n}{n^x}\right)'$$

$$= (-1)^n \cdot \left(n^{-x}\right)'$$

$$= (-1)^n \cdot \left(e^{-x\ln n}\right)'$$

$$= (-1)^n \cdot (-\ln n) \cdot e^{-x\ln n}$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n^x}$$

On veut montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n^x}$ converge uniformément sur $[a,b]$.

Brouillon

La Convergence normale n'aboutit pas.

On a :

$$\boxed{0 < a \leq x \leq b}$$

$$\left|(-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n^x}\right| = \frac{\ln n}{n^x}$$

$$= \ln(n) \cdot n^{-x}$$

$$= \ln n \cdot e^{-x \ln n}$$

$$\leq \ln n \cdot e^{-a \ln n}$$

$\hookrightarrow -x \leq -a$

$$= \frac{\ln n}{n^a}$$

Mais $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^a}$ diverge si $0 < a < 1$, alors que $0 < a$.

$\longrightarrow$ « Bertrand » $\longrightarrow$ classique et Hors program

On veut montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n^x}$

Converge uniformément sur $[a, b]$.

i) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1}\cdot \frac{\ln n}{n^x}$ Converge simplement sur $[a,b]$?

Soit alors $x\in[a,b]$. La série numérique $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1}\cdot\frac{\ln n}{n^x}$ converge, en effet :

On a $x>0$, alors la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_n$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^x}=0$

par croissance comparée. Et on conclut d'après le Critère de Leibniz pour les séries alternées.

ii) La suite de fonctions $(R_n(x))_{n\geq 1}$ Converge uniformément vers 0 sur $[a,b]$?

où $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1}\frac{\ln k}{k^x}$.

Soient $n\geq 1$ et $x\in[a,b]$, on a :

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1}\frac{\ln k}{k^x}\right| \\
&\leq \left|(-1)^{n+2}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x}\right| \quad \left(\overbrace{|1^{er}\text{ terme}|}^{\text{Rappel}}\right) \\
&= \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x}
\end{aligned}$$

$$\boxed{0<a\leq x\leq b}$$

$$|R_n(x)|\leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \quad (\text{ne dépend pas de } x)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} = 0$ (par croissance comparée, vu que $a>0$)

D'où $\left(R_n(x)\right)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers 0 sur $[a,b]$. $\square$

De i) et ii) on conclut que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n^x}$

converge uniformément sur $[a,b]$.

Enfin, $\boxed{\text{la fonction } \zeta_2 \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0,+\infty[.}$

$\boxed{\text{Fin Exercice 9}}$

Exercice 11:

On pose

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x \text{ pour } x \in]0\,;1] \text{ et } u_n(0) = 0$$

a) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

b) Montrer que la série des u_n converge uniformément sur $[0\,;1]$.

c) En déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

Solution

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $U_n(x) = \begin{cases} (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

Soit $x \in [0,1]$. Calculons $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)$.

Cas 1 : Si $x = 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0 \quad (\text{car } \forall n \in \mathbb{N},\ U_n(0) = 0)$$

Cas 2 : Si $x \in]0,1[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot (x^2)^{n+1} \cdot \ln(x)$$

$$= \ln(x) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^{n+1}$$

(La somme de la série géomé existe, car $|-x^2| = x^2 < 1$ vu que $0 < x < 1$)

$$= \ln(x) \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (-x^2)^n$$

$$= \ln(x) \cdot (-x^2) \cdot \frac{1}{1-(-x^2)}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) = \frac{-x^2 \ln(x)}{1+x^2}$$

Cas 3 : Si $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^{n+1} 1^{2n+2} \ln(1)}_{=0}$$

$$= 0$$

Conclusion

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2 \ln(x)}{1+x^2} & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

b) Montrer que la série des u_n converge uniformément sur $[0\,;1]$.

Montrons que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ converge uniformément sur $[0,1]$.

i) On a bien que $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ converge simplement sur $[0,1]$, d'après a).

ii) Reste à montrer que la suite de fonctions $(R_n(x))_{n\geq 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

Où $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k(x)$.

Déterminons une suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ telle que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ |R_n(x)| \leq \alpha_n \\ \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0 \end{array}}$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$. On a :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} x^{2(k+1)} \ln x \right|$$

$$= \left| \ln(x) \cdot \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \cdot (x^2)^{k+1} \right|$$

$$= |\ln x| \cdot \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-x^2)^{k+1} \right|$$

$$= (-\ln x) \cdot \left| \sum_{k=n+2}^{+\infty} (-x^2)^{k} \right|$$

$$= (-\ln x) \cdot \left| \frac{(-x^2)^{n+2}}{1+x^2} \right|$$

$$= (-\ln x) \cdot \frac{x^{2(n+2)}}{1+x^2}$$

$$|R_n(x)| \leq (-\ln x) \cdot x^{2(n+2)} \quad \left(\text{car } \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \right)$$

Considérons la fonction h définie par :

$$\left(\forall x \in]0,1[, \ h(x) = (-\ln x)\, x^{2(n+2)} \right)$$

Déterminons $\sup_{x \in]0,1[} h(x)$.

h est dérivable sur $]0,1[$, et on trouve, après calculs que :

$$\forall x \in]0,1[, \ h'(x) = -x^{2n+1} \left(2(n+2) \ln x + 1 \right)$$

$$h'(x) = 0 \iff \dots \iff x = e^{\frac{-1}{2(n+2)}}$$

$$h'(x) > 0 \iff \dots \iff x < e^{\frac{-1}{2(n+2)}}$$

D'où le tableau de variations suivant :

x	0		$e^{\frac{-1}{2(n+2)}}$		1
$h'(x)$	||	$+$	0	$-$	||
h		$\nearrow$	$\frac{e^{-1}}{2(n+2)}$	$\searrow$	

$h(x) = (-\ln x)\, x^{2(n+2)}$

$$h\left(e^{\frac{-1}{2(n+2)}}\right) = -\ln\left(e^{\frac{-1}{2(n+2)}}\right) \times \left(e^{\frac{-1}{2(n+2)}}\right)^{2(n+2)}$$

$$= -\left(\frac{-1}{2(n+2)}\right) \times e^{-1}$$

$$= \frac{e^{-1}}{2(n+2)}$$

Ainsi : $\left(\forall x \in]0,1[,\ h(x) \leqslant \frac{e^{-1}}{2(n+2)}\right)$

Or $|R_n(x)| \leqslant (-\ln x) \cdot x^{2(n+2)} = h(x)$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[,\ |R_n(x)| \leqslant \frac{e^{-1}}{2(n+2)}$$

Or $|R_n(0)| = 0$ et $|R_n(1)| = 0$

D'où :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1],\ |R_n(x)|\leqslant \dfrac{e^{-1}}{2(n+2)} \\ \text{et } \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{e^{-1}}{2(n+2)}\right)=0 \end{array}}$$

Enfin, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} U_n(x)$ converge uniformément sur $[0,1]$.

c) En déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} U_n(x)$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Et pour tout $n\in\mathbb{N}$, U_n est continue sur $[0,1]$, car :

$\rightsquigarrow$ $\forall x\in]0,1]$, $U_n(x)=(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln(x)$, donc U_n continue sur $]0,1]$.

$\rightsquigarrow$ $\lim\limits_{x\to 0} U_n(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln(x)=0=U_n(0)$

D'où : $\displaystyle\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}U_n(x)\right)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 U_n(x)\,dx\right)$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{-x^2\ln x}{1+x^2}\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln(x)\,dx\right)$$

On a :

$$\int_0^1 (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x)\,dx = (-1)^{n+1} \int_0^1 \left(\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right)' \ln x\,dx$$

$$= (-1)^{n+1} \left(\underbrace{\left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3} \cdot \ln x \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \times \frac{1}{x}\,dx \right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{2n+3} \int_0^1 x^{2n+2}\,dx$$

$$= \frac{(-1)^n}{2n+3} \cdot \left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right]_0^1$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{-x^2 \ln x}{1+x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{1+x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{1+x^2}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{(x^2+1-1)\ln x}{1+x^2}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(\ln x - \frac{\ln x}{1+x^2}\right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \ln x \, dx - \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

Or $\int_0^1 \ln x \, dx = \int_0^1 x' \cdot \ln x \, dx$

$$= \underbrace{\left[x \ln x\right]_0^1}_{=0} - \underbrace{\int_0^1 1 \, dx}_{=1}$$

$$= -1$$

D'où $-1 - \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} \, dx = -1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

$$= -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

Fin Exercice 11

Exercice 14:

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$

a) Quel est le domaine de définition de f ?
Étudier la continuité de f sur celui-ci.

b) Montrer que f est strictement décroissante.

c) Étudier la limite de f en $+\infty$.

d) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

---

a) i) $D_f = ?$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$x \in D_f \iff \left(\text{la série } \sum_{n \geq 1} e^{-x\sqrt{n}} \text{ converge}\right)$

Cas 1 : Si $x > 0$

$\sum_{n \geq 1} e^{-x\sqrt{n}}$ converge car $e^{-x\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV

Cas 2 : Si $x \leq 0$

$\sum e^{-x\sqrt{n}}$ diverge grossièrement car $e^{-x\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$

Ainsi :

$x \in D_f \iff x > 0$

Et donc $D_f =]0, +\infty[$

---

a) ii) Montrons que f est continue sur $]0, +\infty[$:

Posons $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ pour tout $n \geq 1$ et $x \in]0, +\infty[$.

On a : $\forall x \in]0, +\infty[, \ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

Pour montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$, il suffit de vérifier que :

A) $\forall n \geq 1$, f_n est continue sur $]0,+\infty[$.

B) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge unif sur tout segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$.

Pour A) ; c'est bien vérifié.

Pour B) :

Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$. M. que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

Soient $n \geq 1$ et $x \in [a,b]$. On a :

$|f_n(x)| = e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}}$

et que $\sum_{n\geq 1} e^{-a\sqrt{n}}$ converge, car $a>0$.

D'où $\sum_{n\geq 1} f_n$ conv normalement, donc uniformément sur $[a,b]$.

Enfin, f est continue sur $]0,+\infty[$

---

b) M que f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$:

Méthode 1

On montrera que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et que :

$(\forall x>0,\ f'(x)<0)$

Montrons les points suivants pour tirer que $f \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$:

A) $\forall n \geq 1$, f_n de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

B) $\sum_{n\geq 1} f_n$ conv simplement sur $]0,+\infty[$.

C) $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur tout segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$.

Pour A) : C'est bien vérifié.

Pour B) : Déjà fait.

Pour C) : Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$.

M. que $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur $[a,b]$.

Soient $n \geq 1$ et $x \in [a,b]$. On a :

$|f_n'(x)| = \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}} \leq \sqrt{n}\, e^{-a\sqrt{n}}$

et $\sum_n \sqrt{n}\, e^{-a\sqrt{n}}$ converge car $\sqrt{n}\, e^{-a\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et que $\sum_n \frac{1}{n^2}$ CV.

D'où $\sum f_n'$ CN, et donc conv unif sur $[a,b]$.

De A), B) et C) on tire que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et que :

$$\left(\forall x > 0 \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}} < 0\right)$$

Alors f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

Méthode 2

On a $\left(\forall x > 0,\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}\right)$

Et $\forall n \geq 1$, $x \mapsto e^{-x\sqrt{n}}$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

D'où f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

Car pour tout $x < y$ dans $]0,+\infty[$, on a :

$$\left(\forall n \geq 1,\ e^{-y\sqrt{n}} < e^{-x\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-y\sqrt{n}}}_{= f(y)} < \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}}_{= f(x)}$$

$$\Rightarrow f(y) < f(x)$$

---

c) Étudier la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}\right) \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty} e^{-x\sqrt{n}}\right)$$

Pour qu'on puisse intervertir $\lim\limits_{x\to+\infty}$ avec $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}$, il suffit de vérifier les points suivants :

A) $\forall n\geq 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x\sqrt{n}} = l_n \in \mathbb{R}$

B) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} e^{-x\sqrt{n}}$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$.

Pour A) : $\forall n\geq 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-x\sqrt{n}} = 0$

Pour B) :

Il suffit de montrer la convergence normale de $\sum\limits_{n\geq 1} e^{-x\sqrt{n}}$ sur $[1,+\infty[$.

Soient alors $n\geq 1$ et $x\in[1,+\infty[$. On a :

$$|e^{-x\sqrt{n}}| = e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}}$$

et que la série positive $\sum\limits_{n\geq 1} e^{-a\sqrt{n}}$ converge, car $e^{-a\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

et $\sum\limits_{n} \frac{1}{n^2}$ converge.

D'où la convergence normale voulue.

De A) et B) on tire que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty} e^{-x\sqrt{n}}\right)}_{=0}$$

$$= 0$$

d) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

$f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} ?$

L'idée est classique ; c'est à retenir

Soit $x > 0$.

$\forall n \geq 1, \quad \int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \leq e^{-x\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^{n} e^{-x\sqrt{t}}\,dt$

Car $t \longmapsto e^{-x\sqrt{t}}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$.

D'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}\,dt\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{n-1}^{n} e^{-x\sqrt{t}}\,dt\right)$$

$$\Longrightarrow \int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \quad (\Omega)$$

Et on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt = 2\int_0^{+\infty} u\,e^{-xu}\,du \quad \text{(avec le chang de variable } u = \sqrt{t}\text{)}$$

$$= 2\int_0^{+\infty} u\left(\frac{e^{-xu}}{-x}\right)' du$$

$$= 2\left(\underbrace{\left[u\,\frac{e^{-xu}}{-x}\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{-x}\,du\right) \quad \text{(via une intégration par parties)}$$

$$= \frac{2}{x} \int_0^{+\infty} e^{-xu}\,du$$

$$= \frac{2}{x} \left[\frac{e^{-xu}}{-x} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{2}{x^2}$$

Et on a aussi :

$$\int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt = 2\int_1^{+\infty} u\,e^{-xu}\,du$$ (avec le chang de variable $u = \sqrt{t}$)

$$= 2\int_1^{+\infty} u\left(\frac{e^{-xu}}{-x}\right)' du$$

$$= 2\left(\underbrace{\left[u\,\frac{e^{-xu}}{-x}\right]_1^{+\infty}}_{= \frac{e^{-x}}{x}} - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{-x}\,du\right)$$ (via une intégration par parties)

$$= 2\left(\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-xu}\,du\right)$$

$$= 2\left(\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x}\left[\frac{e^{-xu}}{-x}\right]_1^{+\infty}\right)$$

$$= 2\left(\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x}\cdot\frac{e^{-x}}{x}\right)$$

$$= \frac{2e^{-x}}{x^2}(x+1)$$

(2) devient :

$$\forall x>0,\ \frac{2e^{-x}}{x^2}(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{x^2}$$

Or $\frac{2e^{-x}}{x^2}(x+1) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x^2}$ et $\frac{2}{x^2} > 0$

Alors $$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{2}{x^2}$$

$\boxed{\text{Fin Exercice } 14}$

Exercice 15:

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n}$$

a) Justifier que la fonction $f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

b) Établir que pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) + f(1/x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

c) Établir que f est continue sur $]-1\,;1[$ puis que f est continue sur $]-\infty\,;-1[$ et $]1\,;+\infty[$.

d) Établir la continuité de f en 1.

Solution

a) Justifier que la fonction $f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Soit $x \neq -1$.

Montrons que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{x^n}{1+x^n}$ converge.

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n}$$

On espère appliquer le critère spécial des séries alternées.

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ est bien décroissante de limite nulle.

Voyons la suite $\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)_{n \geq 1}$.

Cas 1 : Si $x > 0$

Notons $U_n = \frac{x^n}{1+x^n}$. On a $U_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}}$.

Alors : $U_{n+1} \leq U_n \iff \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}} \times \frac{1+x^n}{x^n} \leqslant 1$$

$$\Leftrightarrow x(1+x^n) \leqslant 1+x^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow x+x^{n+1} \leqslant 1+x^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow x \leqslant 1.$$

a) Si $0 < x \leqslant 1$

Les suites $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)_{n\geqslant 1}$ sont décroissantes et positives.

D'où leur produit $\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{x^n}{1+x^n}\right)_{n\geqslant 1}$ est aussi décroissante

En plus elle est de limite nulle.

D'où la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{x^n}{1+x^n}$ converge.

b) Si $x > 1$