I Préliminaires

1. (a) On sait déjà que $\mathbb{H}$ est une sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ ayant comme base $(\mathrm{E},\mathrm{I},\mathrm{J},\mathrm{K})$.
Il s'agit de montrer que $\mathbb{H}$ est une sous-anneau de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Pour cela, on remarque $\mathbb{H}$ est par conséquent sous-groupe additif de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{E}\in\mathbb{H}$ et que $\mathbb{H}$ est stable par la multiplication car $\{\mathrm{E},\mathrm{I},\mathrm{J},\mathrm{K}\}$ l'est.
Ainsi $\boxed{\mathbb{H} \text{ est une sous-}\mathbb{R}\text{-algèbre de } \mathrm{M}_2(\mathbb{C})}$
L'application $\mathrm{Z}\mapsto\mathrm{Z}^*$ est clairement $\mathbb{R}$-endomorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. De plus :
$$\mathrm{E}^*=\mathrm{E}\in\mathbb{H};\ \mathrm{I}^*=-\mathrm{I}\in\mathbb{H};\ \mathrm{J}^*=-\mathrm{J}\in\mathbb{H};\ \mathrm{K}^*=-\mathrm{K}\in\mathbb{H}$$
Ainsi $\boxed{\mathbb{H} \text{ est stable par l'application } \mathrm{Z}\mapsto\mathrm{Z}^*}$

(b) On peut écrire $\mathrm{Z}=\mathrm{Z}(z_1,z_2)$. On a alors
$$\mathrm{ZZ}^*=\begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2}\\ z_2 & \overline{z_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_2}\\ -z_2 & z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |z_1|^2+|z_2|^2 & 0\\ 0 & |z_1|^2+|z_2|^2\end{pmatrix}=\mathrm{N(Z)E}$$
Or $\mathrm{N(Z)}=0\iff z_1=z_2=0\iff \mathrm{Z}=0$
Ainsi $\boxed{\text{si } \mathrm{Z}\in\mathbb{H}\setminus\{0\}, \text{ alors Z est inversible}}$ et $\mathrm{Z}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{N(Z)}}\mathrm{Z}^*$.

(c) <u>$\Rightarrow$:</u> On suppose que $\mathrm{Z}\in\mathbb{R}_{\mathbb{H}}$. Alors $\mathrm{Z}\in\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathrm{E})$
donc Z est une matrice d'homothétie et commutent donc avec toutes matrices
en particulier, avec tout élément de $\mathbb{H}$.
<u>$\Leftarrow$:</u> On suppose que pour tout $\mathrm{Z}'\in\mathbb{H}$, $\mathrm{ZZ}'=\mathrm{Z}'\mathrm{Z}$.
On peut écrire $\mathrm{Z}=t\mathrm{E}+x\mathrm{I}+y\mathrm{J}+z\mathrm{K}$ avec $(t,x,y,z)\in\mathbb{R}$.
On a donc $\mathrm{ZI}=\mathrm{IZ}$ d'où $t\mathrm{I}-x\mathrm{E}-y\mathrm{K}+z\mathrm{J}=t\mathrm{I}-x\mathrm{E}+y\mathrm{K}-z\mathrm{J}$
Par unicité des coordonnées dans une base, on obtient $y=z=0$ et $\mathrm{Z}=t\mathrm{E}+x\mathrm{I}$
Avec $\mathrm{ZJ}=\mathrm{JZ}$, on obtient $\mathrm{Z}=t\mathrm{E}\in\mathbb{R}_{\mathbb{H}}$.
<u>En conclusion :</u> $\boxed{\mathrm{Z}\in\mathbb{R}_{\mathbb{H}} \text{ si et seulement si } \mathrm{ZZ}'=\mathrm{Z}'\mathrm{Z} \text{ pour tout } \mathrm{Z}'\in\mathbb{H}}$

2. (a) On remarque que $\mathrm{N(Z)}=\det(\mathrm{Z})$. Comme $\det(\mathrm{ZZ}')=\det(\mathrm{Z})\det(\mathrm{Z}')$,
on peut alors conclure $\boxed{\mathrm{N}(\mathrm{ZZ}')=\mathrm{N(Z)N}(\mathrm{Z}') \text{ pour tous } \mathrm{Z},\mathrm{Z}'\in\mathbb{H}}$

(b) L'application $\mathrm{N}:\mathrm{Z}\in\mathbb{H}^\times\longmapsto\det(\mathrm{Z})\in\mathbb{C}$ est un morphisme de groupes.
Ainsi $\boxed{\text{S est un sous-groupe de } \mathbb{H}^\times \text{ en tant que noyau d'un morphisme de groupes}}$
Soit $\mathrm{Z}\in\mathbb{H}^\times$. On a $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{N(Z)}}}\mathrm{Z}\in\mathbb{H}$ et
$$\mathrm{N}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{N(Z)}}}\mathrm{Z}\right)=\det\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{N(Z)}}}\mathrm{Z}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{N(Z)}}}\right)^2\det(\mathrm{Z})=1$$
Ainsi $\boxed{\frac{1}{\sqrt{\mathrm{N(Z)}}}\mathrm{Z}\in\mathrm{S}}$

3. (a) Soit $x,y,z,t\in\mathbb{R}$. On pose $z_1=x+\mathrm{i}y$ et $z_2=z+\mathrm{i}t$ de sorte que $x\mathrm{E}+y\mathrm{I}+z\mathrm{J}+t\mathrm{K}=\mathrm{Z}(z_1,z_2)$.
Ainsi $\mathrm{N}(x\mathrm{E}+y\mathrm{I}+z\mathrm{J}+t\mathrm{K})=\mathrm{N}(\mathrm{Z}(z_1,z_2))=|z_1|^2+|z_2|^2$
On a bien $\boxed{\mathrm{N}(x\mathrm{E}+y\mathrm{I}+z\mathrm{J}+t\mathrm{K})=x^2+y^2+z^2+t^2}$

(b) Soit $\mathrm{U}\in\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$. En reprenant 1(a), $\mathrm{Z}\mapsto\mathrm{Z}^*$ est une symétrie $\mathbb{R}$-vectorielle sur $\mathbb{R}_{\mathbb{H}}$ parallèlement à $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$.
Ainsi $\mathrm{U}^*=-\mathrm{U}$ et $\boxed{\mathrm{U}^2=-\mathrm{UU}^*=-\mathrm{N(U)E}}$ selon 1(b).

Soit $\mathrm{Z} \in \mathbb{H}$ tel que $\mathrm{Z}^2 \in]-\infty, 0]\,\mathrm{E}$.
On peut écrire $\mathrm{Z} = x\mathrm{E} + \mathrm{U}$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{U} \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ car $\mathbb{H} = \mathbb{R}_{\mathbb{H}} \bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{H}^{\mathrm{im}}$.
Ainsi $\mathrm{Z}^2 = x^2\mathrm{E} + \mathrm{U}^2 + 2x\mathrm{U} = \big(x^2 - \mathrm{N}(\mathrm{U})\big)\,\mathrm{E} + 2x\mathrm{U}$ d'où $2x\mathrm{U} = 0$.
Par l'absurde si $x \neq 0$, on a $\mathrm{U} = 0$. D'où $\mathrm{Z}^2 = x^2\mathrm{E} \in]-\infty, 0]\,\mathrm{E}$ puis $x^2 < 0$ Absurde
donc $\mathrm{Z} = \mathrm{U} \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}$.
Comme on a $\forall \mathrm{U} \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}$, $\mathrm{N}(\mathrm{U}) \in]-\infty, 0]$, on peut conclure que $\boxed{\mathbb{H}^{\mathrm{im}} = \big\{\mathrm{U} \in \mathbb{H} \;\big|\; \mathrm{U}^2 \in]-\infty, 0]\,\mathrm{E}\big\}}$

4. On note $\mathcal{S}_3$ la sphère unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ et on remarque que $\psi(\mathcal{S}_3) = \mathrm{S}$.
Par ailleurs comme ψ et ψ^{-1} sont $\mathbb{R}$-linéaires entre espaces vectoriels de dimensions 4, ce sont des applications continues.
Ainsi $\mathrm{S} = \big(\psi^{-1}\big)^{-1}(\mathcal{S}_3)$ est l'image réciproque de $\mathcal{S}_3$ fermé de $\mathbb{R}^4$ par une application continue $\mathbb{H} \to \mathbb{R}^4$, alors S est un fermé de $\mathbb{H}$.
Par conséquent $\boxed{\text{S est une partie fermée de } \mathbb{H}}$
Soit $a, b \in \mathcal{S}_3$. Il existe alors Π plan de $\mathbb{R}^4$ tel que a et $b \in \Pi$.
Comme a est unitaire, le théorème de la base incomplète suivi d'une orthogonalisation nous fournit a' tel que (a, a') est une base orthonormée de Π.
Comme $b \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(a, a')$ est unitaire, cela nous fournit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $b = \cos(\theta)a + \sin(\theta)a'$.
L'application $\varphi : t \in [0,1] \longmapsto \cos(t\theta)a + \sin(t\theta)a'$ est continue à valeurs dans $\mathcal{S}_3$.
Or $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$.
Ainsi $\mathcal{S}_3$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^4$ or $\mathrm{S} = \psi(\mathcal{S}_3)$ et ψ est continue
on peut conclure que $\boxed{\text{S est une partie connexe par arcs de } \mathbb{H}}$

5. (a) $\sqrt{\mathrm{N}}$ est la norme euclidienne. Ainsi par formule de polarisation, on a $4\langle \mathrm{U}, \mathrm{V}\rangle = \mathrm{N}(\mathrm{U}+\mathrm{V}) - \mathrm{N}(\mathrm{U}-\mathrm{V})$
Ainsi en utilisant 1(b), on a par $\mathbb{R}$-linéarité de $\mathrm{Z} \mapsto \mathrm{Z}^*$ et comme $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}$:

$$4\langle \mathrm{U}, \mathrm{V}\rangle = (\mathrm{U}+\mathrm{V})(\mathrm{U}+\mathrm{V})^* - (\mathrm{U}-\mathrm{V})(\mathrm{U}-\mathrm{V})^* = (\mathrm{U}+\mathrm{V})(-\mathrm{U}-\mathrm{V}) - (\mathrm{U}-\mathrm{V})(-\mathrm{U}+\mathrm{V}) = -2(\mathrm{VU}+\mathrm{UV})$$

Ainsi $\boxed{\text{U et V sont orthogonaux si et seulement si } \mathrm{UV} + \mathrm{VU} = 0}$
On suppose que $\mathrm{U} \perp \mathrm{V}$.
On a $(\mathrm{UV})^* = \mathrm{V}^*\mathrm{U}^*$ car $z \mapsto \overline{z}$ est un $\mathbb{R}$-automorphisme d'algèbre de $\mathbb{C}$ et $(\mathrm{UV})^\top = \mathrm{V}^\top \cdot \mathrm{U}^\top$
Ainsi $(\mathrm{UV})^* = (-\mathrm{V})(-\mathrm{U}) = \mathrm{VU} = -\mathrm{UV}$ d'où $\boxed{\mathrm{UV} \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}}$ en utilisant le fait que $\mathrm{Z} \mapsto \mathrm{Z}^*$ est une symétrie parallèlement à $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$.
On écrit $\mathrm{U} = x\mathrm{I} + y\mathrm{J} + z\mathrm{K}$ et $\mathrm{V} = x'\mathrm{I} + y'\mathrm{J} + z'\mathrm{K}$ avec $x, y, z, x', y', z' \in \mathbb{R}$.
On a $\mathrm{UV} = -(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{E} + (yz' - zy')\,\mathrm{I} + (zx' - xz')\,\mathrm{J} + (xy' - yx')\,\mathrm{K}$
d'où $\mathrm{UV} = (yz' - zy')\,\mathrm{I} + (zx' - xz')\,\mathrm{J} + (xy' - yx')\,\mathrm{K}$ car $\mathrm{UV} \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}$
Ainsi le déterminant de la famille $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{UV})$ dans la base $(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K})$, après développement par rapport à la dernière ligne est

$$\begin{vmatrix} x & x' & (yz' - zy') \\ y & y' & (zx' - xz') \\ z & z' & (xy' - yx') \end{vmatrix} = \big(yz' - zy'\big)^2 + \big(zx' - xz'\big)^2 + \big(xy' - yx'\big)^2 \geqslant 0$$

donc $\boxed{\text{le déterminant de la famille } (\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{UV}) \text{ dans la base } (\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}) \text{ de } \mathbb{H}^{\mathrm{im}} \text{ est positif ou nul}}$

(b) On suppose que (U, V) est une famille orthonormale donc $\mathrm{U} \perp \mathrm{V}$. On a alors

$$\mathrm{U}\,(\mathrm{UV}) + (\mathrm{UV})\,\mathrm{U} = \mathrm{U}^2\mathrm{V} + \mathrm{UVU} = \mathrm{U}^2\mathrm{V} - \mathrm{U}(\mathrm{UV}) = 0$$

Donc $\mathrm{U} \perp (\mathrm{UV})$ et de manière analogue : $\mathrm{V} \perp (\mathrm{UV})$. On s'est servi de (a) (double implication).
De plus $\mathrm{N}(\mathrm{U}) = \mathrm{N}(\mathrm{V}) = 1$ et avec 2(a) : $\mathrm{N}(\mathrm{UV}) = \mathrm{N}(\mathrm{U})\mathrm{N}(\mathrm{V}) = 1$
Ainsi $\boxed{(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{UV}) \text{ est une base orthonormée directe de } \mathbb{H}^{\mathrm{im}}}$ orienté par la base $(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K})$.

II Automorphismes de $\mathbb{H}$ et rotations

6. Soit $\mathrm{M}=(u,v)$ et $\mathrm{M}'=(u',v')\in \mathrm{S}\times\mathrm{S}$. Soit $\mathrm{Z}\in\mathbb{H}$. On a :

$$\alpha(\mathrm{M})\circ\alpha(\mathrm{M}')(\mathrm{Z})=u\left(u'\mathrm{Z}(v')^{-1}\right)v^{-1}=\left(uu'\right)\mathrm{Z}\left(vv'\right)^{-1}=\alpha\left(\mathrm{M}\times\mathrm{M}'\right)(\mathrm{Z})$$

Ainsi $\alpha(\mathrm{M})\circ\alpha(\mathrm{M}')=\alpha\left(\mathrm{M}\times\mathrm{M}'\right)$.
Ainsi $\boxed{\alpha \text{ est un morphisme du groupe } (\mathrm{S}\times\mathrm{S},\times) \text{ vers le groupe } (\mathrm{GL}(\mathbb{H}),\circ)}$

On suppose que $\mathrm{M}\in\mathrm{Ker}(\alpha)$. Alors $\alpha(\mathrm{M})=\mathrm{Id}_{\mathbb{H}}$.
Alors $\mathrm{E}=\mathrm{Id}_{\mathbb{H}}(\mathrm{E})=\alpha(\mathrm{M})(\mathrm{E})=u\mathrm{E}v^{-1}=uv^{-1}$ et donc $u=v$.
d'où $\forall w\in\mathbb{H},\ uwu^{-1}=w$ et donc $\forall w\in\mathbb{H},\ uw=wu$
Ainsi $u\in\mathbb{R}_{\mathbb{H}}$ selon 1(c) or $\mathrm{N}(u)=1$ donc $u\in\{\mathrm{E},-\mathrm{E}\}$
Réciproquement : On suppose $\mathrm{M}=(u,u)$ avec $u\in\{\mathrm{E},-\mathrm{E}\}$
On a alors $\alpha(\mathrm{M})=\mathrm{Id}_{\mathbb{H}}$ selon 1(c) car $u\in\mathbb{R}_{\mathbb{H}}$.
On peut conclure que $\boxed{\mathrm{Ker}(\alpha)=\{(\mathrm{E},\mathrm{E}),(-\mathrm{E},-\mathrm{E})\}}$

7. On munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ d'une norme $\|\cdot\|$. Le produit matriciel étant continu et bilinéaire,
cela nous fournit $\mathrm{K}>0$ tel que $\forall \mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathrm{M}_2(\mathbb{C}),\ \|\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\|\leqslant \mathrm{K}\|\mathrm{A}\|\cdot\|\mathrm{B}\|$.
donc $\forall \mathrm{A}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ |||\mathrm{M}\mapsto \mathrm{AM}|||\leqslant \mathrm{K}\|\mathrm{A}\|$
Ainsi l'application linéaire $\mathrm{A}\longmapsto(\mathrm{M}\mapsto\mathrm{AM})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vers $\mathrm{End}\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\right)$ est continue
donc l'application $u\longmapsto(\mathrm{Z}\mapsto u\mathrm{Z})$ est continue de S vers $\mathrm{End}(\mathbb{H})$ et c'est analogue pour $u\longmapsto(\mathrm{Z}\mapsto\mathrm{Z}u)$
Par ailleurs, l'application $u\mapsto u^*$ est continue sur $\mathbb{H}$ car $\mathbb{R}$-linéaire et que $\dim(\mathbb{H})=4<\infty$.
Or $\forall u\in\mathcal{S},\ u^{-1}=u^*$ donc $u\mapsto u^{-1}$ est continue sur S.
Par composition de $(u,v)\longmapsto\left((\mathrm{Z}\mapsto u\mathrm{Z}),\left(\mathrm{Z}\mapsto \mathrm{Z}v^{-1}\right)\right)$ et de $\circ$ sur $\mathrm{End}(\mathrm{V})$ qui est continue car bilinéaire sur $\mathrm{End}(\mathrm{V})$ qui est de dimension finie.
Alors $\boxed{\alpha \text{ est continue sur } \mathrm{S}\times\mathrm{S}}$ On aurait pu remarquer que $(u,w)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\mapsto(\mathrm{Z}\mapsto u\mathrm{Z}v)$ est bilinéaire.
De plus, pour $(u,v)\in\mathrm{S}\times\mathrm{S}$, on a

$$\forall \mathrm{Z}\in\mathbb{H},\sqrt{\mathrm{N}\left(\alpha(u,v)(\mathrm{Z})\right)}=\sqrt{\mathrm{N}\left(u\mathrm{Z}v^{-1}\right)}=\sqrt{\mathrm{N}(u)\mathrm{N}(\mathrm{Z})\mathrm{N}\left(v^{-1}\right)}=\sqrt{\mathrm{N}(\mathrm{Z})}$$

donc $\alpha(u,v)\in\mathrm{End}(\mathbb{H})$ est une isométrie vectorielle c'est à dire $\alpha(u,v)\in\mathrm{O}(\mathbb{H})$.
Ainsi $\alpha(\mathrm{S}\times\mathrm{S})\subset\mathrm{O}(\mathbb{H})$.
Or on peut montrer que $\mathrm{S}\times\mathrm{S}$ est connexe par arcs car S l'est
donc $\alpha(\mathrm{S}\times\mathrm{S})$ est une partie connexe par arcs $\mathrm{O}(\mathbb{H})$ car α est continue.
Or le déterminant est continue d'où $\det(\alpha(\mathrm{S}\times\mathrm{S}))$ est un intervalle.
De plus, $\forall\varphi\in\mathrm{O}(\mathbb{H})$, $\det(\varphi)\in\{-1,1\}$
Or $(\mathrm{E},\mathrm{E})\in\mathrm{S}\times\mathrm{S}$ et $\mathrm{Id}_{\mathbb{H}}=\alpha(\mathrm{E},\mathrm{E})$ d'où $1\in\det(\alpha(\mathrm{S}\times\mathrm{S}))\subset\{-1,1\}$.
Ainsi $\det(\alpha(\mathrm{S}\times\mathrm{S}))=\{1\}$ et donc $\alpha(\mathrm{S}\times\mathrm{S})\subset\mathrm{SO}(\mathbb{H})$
Ainsi $\boxed{\text{l'image de } \alpha \text{ est contenue dans } \mathrm{SO}(\mathbb{H})}$

8. (a) On a $\mathrm{E}\in\mathbb{R}_{\mathbb{H}}$ et $v\in\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ donc $(\cos\theta)\mathrm{E}\perp(\sin\theta)v$
Ainsi selon le théorème de Pythagore, on a

$$\mathrm{N}(u)=\mathrm{N}\left((\cos\theta)\mathrm{E}\right)+\mathrm{N}\left((\sin\theta)v\right)=\cos^2(\theta)\mathrm{N}(\mathrm{E})^2+\sin^2(\theta)\mathrm{N}(v)^2=\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$$

Ainsi $\boxed{u\in\mathrm{S}}$
D'où selon 1(b), on a $u^{-1}=\dfrac{u^*}{\mathrm{N}(u)}=\dfrac{(\cos\theta)\mathrm{E}^*+(\sin\theta)v^*}{1}$
ainsi $\boxed{u^{-1}=(\cos\theta)\mathrm{E}-(\sin\theta)v}$ car $v\in\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$.

(b) Selon 5, (v,w,vw) est une base orthonormée directe de $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ (*inutile de le rappeler, en temps limité*).
On remarque que u et v commutent car $u\in\mathbb{R}[v]$. D'où

$$\alpha(u,u)(v)=\mathrm{C}_u(v)=uvu^{-1}=vuu^{-1}=v$$

On a $\alpha(u,u)(w)=uw\left(\cos(\theta)\mathrm{E}-\sin(\theta)v\right)=\left(\cos(\theta)\mathrm{E}+\sin(\theta)v\right)\left(\cos(\theta)w-\sin(\theta)wv\right)$
Or $v\in\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ d'où $v^*=-v$ et $v^2=-vv^*=-\mathrm{N}(v)\mathrm{E}=-\mathrm{E}$ selon 1(b) et car $v\in\mathrm{S}$.
De plus $v\perp w$ donc $wv=-vw$ selon 5(a) donc $vwv=-wv^2=w\mathrm{E}=w$ et

$$\alpha(u,u)(w)=\cos(\theta)^2w-\cos(\theta)\sin(\theta)wv+\sin(\theta)\cos(\theta)vw-\sin(\theta)^2w=\cos\left(2\theta\right)w+\sin\left(2\theta\right)vw$$

or E est un vecteur unitaire de $\left(\mathbb{H}^{\mathrm{im}}\right)^{\perp}$.
Ainsi (E,v,w,vw) est une base orthonormée de $\mathbb{H}$ or $\alpha(u,u)\in\mathrm{SO}(\mathbb{H})$ selon 7

d'où comme $\alpha(u,u)(\mathrm{E})=\mathrm{E}$, la matrice de $\alpha(u,u)$ dans cette base $\begin{pmatrix}1&0&0&\star\\0&1&0&\star\\0&0&\cos(2\theta)&\star\\0&0&\sin(2\theta)&\star\end{pmatrix}\in\mathrm{SO}(4)$

Comme les colonnes forment une base orthonormée et que le déterminant vaut 1,

cette matrice est $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos(2\theta)&-\sin(2\theta)\\0&0&\sin(2\theta)&\cos(2\theta)\end{pmatrix}\in\mathrm{SO}(4)$. Par restriction à $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$:

$$\boxed{\text{la matrice de } \mathrm{C}_u \text{ dans la base orthonormée directe } (v,w,vw) \text{ de } \mathbb{H}^{\mathrm{im}} \text{ est } \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos(2\theta)&-\sin(2\theta)\\0&\sin(2\theta)&\cos(2\theta)\end{pmatrix}}$$

9. L'application $u\in\mathrm{S}\mapsto(u,u)$ est clairement un morphisme de groupes $\mathrm{S}\to\mathrm{S}\times\mathrm{S}$.
Par composition $u\mapsto\mathrm{C}_u$ induit un morphisme de groupes $\mathrm{S}\to\mathrm{SO}\left(\mathbb{H}^{\mathrm{im}}\right)$.
Soit $r\in\mathrm{SO}\left(\mathbb{H}^{\mathrm{im}}\right)$. Le cours nous fournit $\mathcal{B}'=(v,w,w')$ base orthonormée de $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(r)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos(\alpha)&-\sin(\alpha)\\0&\sin(\alpha)&\cos(\alpha)\end{pmatrix}$$

En notant $\mathcal{B}=(v,w,vw)$, alors $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ et on a $vw\in\{w',-w'\}$. Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r)\in\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos(\alpha)&-\sin(\alpha)\\0&\sin(\alpha)&\cos(\alpha)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos(\alpha)&\sin(\alpha)\\0&-\sin(\alpha)&\cos(\alpha)\end{pmatrix}\right\}$$

Quitte à changer α en $-\alpha$ et en posant $\theta=\alpha/2$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos(2\theta)&-\sin(2\theta)\\0&\sin(2\theta)&\cos(2\theta)\end{pmatrix}$

On pose $u=(\cos\theta)\,\mathrm{E}+(\sin\theta)\,v$ et on peut appliquer 8.
Ainsi $u\in\mathrm{S}$ et par unicité de la matrice d'un endomorphisme dans une base, on a $\mathrm{C}_u=r$.
On conclut que $\boxed{\text{l'application } u\mapsto\mathrm{C}_u \text{ induit un morphisme surjectif de groupes } \mathrm{S}\to\mathrm{SO}\left(\mathbb{H}^{\mathrm{im}}\right)}$
Soit u dans le noyau de ce morphisme.
Alors $\mathrm{C}_u=\mathrm{Id}_{\mathbb{H}^{\mathrm{im}}}$ et donc $\forall\mathrm{Z}\in\mathbb{H}^{\mathrm{im}},\ \alpha(u,u)(\mathrm{Z})=\mathrm{Id}_{\mathbb{H}^{\mathrm{im}}}(\mathrm{Z})=\mathrm{Id}_{\mathbb{H}}(\mathrm{Z})$.
Par ailleurs $\forall\mathrm{Z}\in\mathbb{R}_{\mathbb{H}},\ \alpha(u,u)(\mathrm{Z})=u\mathrm{Z}u^{-1}=\mathrm{Z}=\mathrm{Id}_{\mathbb{H}}(\mathrm{Z})$ selon 1(c).
Comme $\mathbb{H}=\mathbb{R}_{\mathbb{H}}\bigoplus_{\mathbb{R}}\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$, par linéarité on a

$$\forall\mathrm{Z}\in\mathbb{H},\ \alpha(u,u)(\mathrm{Z})=\mathrm{Id}_{\mathbb{H}}(\mathrm{Z})=\mathrm{Z}$$

Ainsi selon 1(c), $(u,u)\in\mathrm{Ker}(\alpha)$ donc $u\in\{\mathrm{E},-\mathrm{E}\}$
La réciproque étant évidente. On peut conclure :

$$\boxed{\text{Le noyau du morphisme de groupes } u\in\mathrm{S}\longmapsto\mathrm{C}_u\in\mathrm{SO}\left(\mathbb{H}^{\mathrm{im}}\right) \text{ est } \{\mathrm{E},-\mathrm{E}\}}$$

10. (a) D'après 7, on a $\alpha(\mathrm{S}\times\mathrm{S})\subset\mathrm{SO}(\mathbb{H})$.
Soit $r\in\mathrm{SO}(\mathbb{H})$. On note $v=r(\mathrm{E})$. On a donc $\mathrm{N}(v)=\mathrm{N}(\mathrm{E})=1$ car $\mathrm{E}\in\mathrm{S}$.
Ainsi $v\in\mathrm{S}$ or $\mathrm{SO}(\mathbb{H})$ est un groupe. Ainsi

$$\rho=\alpha(v,\mathrm{E})^{-1}\circ r\in\mathrm{SO}(\mathbb{H})$$

De plus $\rho(\mathrm{E})=\mathrm{E}$. Comme $\mathbb{R}_{\mathbb{H}}\overset{\perp}{\bigoplus}\mathbb{H}^{\mathrm{im}}=\mathbb{H}$, alors ρ laisse stable $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$.
On note R l'endomorphisme induit par ρ sur $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ et on a $\mathrm{R}\in\mathrm{O}\left(\mathbb{H}^{\mathrm{im}}\right)$.
Dans la base orthonormé $(\mathrm{E},\mathrm{I},\mathrm{J},\mathrm{K})$ la matrice de ρ est $\mathrm{diag}\left(1,\mathrm{Mat}_{(\mathrm{I},\mathrm{J},\mathrm{K})}(\mathrm{R})\right)$.
On en déduit que $1=\det(\rho)=\det(\mathrm{R})\times 1$ donc $\mathrm{R}\in\mathrm{SO}\left(\mathbb{H}^{\mathrm{im}}\right)$.
La question précédente nous fournit $u\in\mathrm{S}$ tel que $\mathrm{R}=\mathrm{C}_u$ et ainsi $\rho=\alpha(u,u)$.
donc $r=\alpha(v,\mathrm{E})\circ\alpha(u,u)\in\mathrm{SO}(\mathbb{H})$.
On en déduit que $\boxed{\alpha(\mathrm{S}\times\mathrm{S})=\mathrm{SO}(\mathbb{H})}$

(b) $\mathrm{S}\times\{\mathrm{E}\}$ est un sous-groupe du groupe $\mathrm{S}\times\mathrm{S}$
Ainsi $\boxed{\mathrm{N}=\alpha(\mathrm{S}\times\{\mathrm{E}\})\text{ est un sous-groupe de }\alpha(\mathrm{S}\times\mathrm{S})=\mathrm{SO}(\mathbb{H})}$ car α est un morphisme de groupes.
Soit $n\in\mathrm{N}$ et $g\in\mathrm{SO}(\mathbb{H})$.
On peut écrire, $n=\alpha(v,\mathrm{E})$ et $g=\mathrm{C}_u=\alpha(u,u)$ avec u et $v\in\mathrm{S}$, selon ce qui précède. On a alors :

$$gng^{-1}=\alpha\left((u,u)\times(v,\mathrm{E})\times(u,u)^{-1}\right)=\alpha\left(uvu^{-1},u\mathrm{E}u^{-1}\right)=\alpha\left(uvu^{-1},\mathrm{E}\right)$$

Comme S est un groupe, alors $uvu^{-1}\in\mathrm{S}$. Ainsi $\boxed{gng^{-1}\in\mathrm{N}}$
On a $\mathrm{id}=\alpha(\mathrm{E},\mathrm{E})\in\mathrm{N}$ et $-\mathrm{id}=\alpha(-\mathrm{E},\mathrm{E})\in\mathrm{N}$ et $\mathrm{N}\subset\alpha(\mathrm{S}\times\mathrm{S})=\mathrm{SO}(\mathbb{H})$. D'où

$$\{\pm\mathrm{id}\}\subset\mathrm{N}\subset\mathrm{SO}(\mathbb{H})$$

On a $\alpha(\mathrm{I},\mathrm{E})\in\mathrm{N}$ et $\alpha(\mathrm{I},\mathrm{E})^2=\alpha(-\mathrm{E},\mathrm{E})=-\mathrm{id}$ donc $\alpha(\mathrm{I},\mathrm{E})\notin\{\pm\mathrm{id}\}$ et $\{\pm\mathrm{id}\}\neq\mathrm{N}$.

On considère $r\in\mathrm{End}(\mathbb{H})$ tel que $\mathrm{Mat}_{(\mathrm{E},\mathrm{I},\mathrm{J},\mathrm{K})}(r)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

L'endomorphisme r envoie la base orthonormée $(\mathrm{E},\mathrm{I},\mathrm{J},\mathrm{K})$ vers la base $(\mathrm{I},\mathrm{E},\mathrm{K},\mathrm{J})$ qui est orthonormée.
De plus on remarque que $\det(r)=1$ d'où $r\in\mathrm{SO}(\mathbb{H})$.
Par l'absurde si $r\in\mathrm{N}$, il existerait $u\in\mathrm{S}$ tel que $\forall\mathrm{Z}\in\mathbb{H},\ r(\mathrm{Z})=\alpha(u,\mathrm{E})(\mathrm{Z})=u\mathrm{Z}$.
donc $\mathrm{I}=u\mathrm{E}=u$ et $\mathrm{E}=u\mathrm{I}=\mathrm{I}^2=-\mathrm{E}$ Absurde.
donc $r\notin\mathrm{N}$. On a bien $\boxed{\{\pm\mathrm{id}\}\subsetneq\mathrm{N}\subsetneq\mathrm{SO}(\mathbb{H})}$

11. Selon l'énoncé les éléments de $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ sont les éléments $f\in\mathrm{GL}(\mathbb{H})$ tel que $\forall\mathrm{Z},\mathrm{Z}'\in\mathbb{H},\ f(\mathrm{ZZ}')=f(\mathrm{Z})f(\mathrm{Z}')$.
On remarque que comme $\forall\mathrm{M}\in\mathbb{H},\ \left(\mathrm{M}^2=\mathrm{M}\text{ et }\mathrm{M}\neq 0\right)\iff\mathrm{M}=\mathrm{E}$, on retrouve la définition complète de morphismes d'algèbres :

$$[f\in\mathrm{GL}(\mathbb{H})\text{ et }\ (\forall\mathrm{Z},\mathrm{Z}'\in\mathbb{H},\ f(\mathrm{ZZ}')=f(\mathrm{Z})f(\mathrm{Z}'))]\Longrightarrow(f(\mathrm{E})=\mathrm{E})$$

On a clairement $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})\subset\mathrm{GL}(\mathbb{H})$ (i) et $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})\neq\emptyset$ (ii) car $\mathrm{Id}_{\mathbb{H}}\in\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.
De plus $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ est stable par composition et prise de réciproque d'où $\boxed{\mathrm{Aut}(\mathbb{H})\text{ est un sous-groupe de }\mathrm{GL}(\mathbb{H})}$
Soit $u\in\mathrm{S}$. On a $\alpha(u,u)\in\mathrm{SO}(\mathbb{H})$ donc $\alpha(u,u)\in\mathrm{GL}(\mathbb{H})$.
Soit Z et $\mathrm{Z}'\in\mathbb{H}$. On a

$$\alpha(u,u)(\mathrm{Z})\alpha(u,u)(\mathrm{Z}')=u\mathrm{Z}u^{-1}u\mathrm{Z}'u^{-1}=u\mathrm{ZZ}u^{-1}=\alpha(u,u)(\mathrm{ZZ}')$$

Ainsi $\boxed{\alpha(u,u)\in\mathrm{Aut}(\mathbb{H})\text{ pour tout }u\in\mathrm{S}}$

12. Soit $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.
    On a $f(\mathrm{E}) = f(\mathrm{E}^2) = f(\mathrm{E})^2$. or $f(\mathrm{E}) \neq 0$ car f isomorphisme et $\mathrm{E} \neq 0$.
    Ainsi selon 1(b), $f(\mathrm{E})$ est inversible et on a $f(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$.
    A priori il n'est pas nécessaire de le redémontrer mais vu la définition de l'énoncé des isomorphismes d'algèbres.
    On a $f(\mathrm{I})^2 = f(\mathrm{I}^2) = f(-\mathrm{E}) = -f(\mathrm{E}) = (-1)\mathrm{E}$ donc $f(\mathrm{I}) \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ selon 3(b).
    Ainsi $f(\mathrm{I})^2 = -\mathrm{N}(f(\mathrm{I}))\mathrm{E}$ d'où $\mathrm{N}(f(\mathrm{I})) = 1$ ainsi $f(\mathrm{I}) \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}} \cap \mathrm{S}$.
    De même $f(\mathrm{J})$ et $f(\mathrm{K}) \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}} \cap \mathrm{S}$.
    Par ailleurs $f(\mathrm{I})f(\mathrm{J}) + f(\mathrm{J})f(\mathrm{I}) = f(\mathrm{IJ} + \mathrm{JI}) = f(0) = 0$ d'où $f(\mathrm{I}) \perp f(\mathrm{J})$
    Ainsi $(f(\mathrm{I}), f(\mathrm{J}))$ est une famille orthonormale de $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ et $f(\mathrm{I})f(\mathrm{J}) = f(\mathrm{IJ}) = f(\mathrm{K})$
    Ainsi $\boxed{(f(\mathrm{I}), f(\mathrm{J}), f(\mathrm{K})) \text{ est une base orthonormée directe de } \mathbb{H}^{\mathrm{im}}}$ (toujours pas vu d'orientation)

13. (a) Morphisme : Soit $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.
    On remarque que comme f est $\mathbb{R}$-linéaire et que $f(\mathrm{I}), f(\mathrm{J})$ et $f(\mathrm{K}) \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}$.
    Alors f induit sur $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ une $\mathbb{R}$-endomorphisme qu'on note $\widetilde{f}$.
    Comme $\widetilde{f}$ envoie une base orthonormée directe sur une base orthonormée directe alors $\widetilde{f} \in \mathrm{SO}\left(\mathbb{H}^{\mathrm{im}}\right)$.
    De plus pour $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$, on a $\widetilde{f \circ g} = \widetilde{f} \circ \widetilde{g}$.
    L'application de restriction est bien un morphisme de groupes $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \to \mathrm{SO}\left(\mathbb{H}^{\mathrm{im}}\right)$.

    Pour l'injectivité on remarque que si $\widetilde{f} = \mathrm{Id}_{\mathbb{H}^{\mathrm{im}}}$ alors $\forall \mathrm{Z} \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}},\ f(\mathrm{Z}) = \mathrm{Z}$ et $\forall \mathrm{Z} \in \mathbb{R}_{\mathbb{H}},\ f(\mathrm{Z}) = \mathrm{Z}$ car $f(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$
    Comme $\mathbb{H} = \mathbb{R}_{\mathbb{H}} \bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ alors $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{H}}$

    Pour la surjectivité : Soit $g \in \mathrm{SO}\left(\mathbb{H}^{\mathrm{im}}\right)$.
    La question 9 nous fournit $u \in \mathrm{S}$ tel que $g = \mathrm{C}_u$.
    On considère $\widehat{g} \in \mathrm{End}\,(\mathbb{H})$ tel que $\forall \mathrm{Z} \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}},\ \widehat{g}(\mathrm{Z}) = g(\mathrm{Z})$ et $\forall \mathrm{Z} \in \mathbb{R}_{\mathbb{H}},\ \widehat{g}(\mathrm{Z}) = \mathrm{Z}$.
    On vérifie facilement que $\widehat{g}_{|\mathbb{H}^{\mathrm{im}}} = g$.
    Par ailleurs $\forall \mathrm{Z} \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}},\ \widehat{g}(\mathrm{Z}) = \alpha(u,u)(\mathrm{Z})$ et $\forall \mathrm{Z} \in \mathbb{R}_{\mathbb{H}},\ \widehat{g}(\mathrm{Z}) = \alpha(u,u)(\mathrm{Z})$.
    Comme $\alpha(u,u) \in \mathrm{End}\,(\mathbb{H})$ et $\mathbb{H} = \mathbb{R}_{\mathbb{H}} \bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ alors
    Alors $\widehat{g} = \alpha(u,u)$ et $\widehat{g} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ selon 11.
    On peut conclure que

$$\boxed{\text{l'application de restriction à } \mathbb{H}^{\mathrm{im}} \text{ induit un isomorphisme de groupes } \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \simeq \mathrm{SO}\left(\mathbb{H}^{\mathrm{im}}\right)}$$

    (b) Selon 11, on a $\{\alpha(u,u) \mid u \in \mathrm{S}\} \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.
    Réciproquement soit $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.
    On reprend la notation du (a) pour la restriction : $\widetilde{f} \in \mathrm{SO}\left(\mathbb{H}^{\mathrm{im}}\right)$
    La question 9, nous fournit $u \in \mathrm{S}$ tel que $\widetilde{f} = \mathrm{C}_u$.
    Comme $\forall \mathrm{Z} \in \mathbb{R}_{\mathbb{H}},\ \alpha(u,u)(\mathrm{Z}) = \mathrm{Z} = f(\mathrm{Z})$.
    On en déduit comme en (a) que $f = \alpha(u,u)$.
    On peut alors conclure que $\boxed{\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \{\alpha(u,u) \mid u \in \mathrm{S}\}}$

III Normes euclidiennes sur $\mathbb{R}^2$

14. (a) Pour $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$,
on note $\mathrm{N(A)}$ la norme subordonnée de l'application linéaire $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right) \to \left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|\right) : x \mapsto \mathrm{A}x$.
On s'est servi du fait que toute application linéaire partant de $\mathbb{R}^2$ est continue car $\dim\left(\mathbb{R}^2\right) < \infty$.
Alors $\mathcal{K} = \left\{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}^2,\ \|x\|_2 \geqslant \|\mathrm{A}x\|\right\}$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon 1.
Ainsi $\mathcal{K}$ est une partie compacte en tant que fermé borné d'un espace de dimension finie et convexe en tant que boule. D'où $\boxed{\mathcal{K} \text{ est une partie compacte et convexe de } \mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$

(b) $\mathcal{K}$ est un compact non vide et l'application $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \det(\mathrm{M})$ est continue
Ainsi le théorème des bornes atteintes nous fournit $\boxed{\mathrm{A} \in \mathcal{K} \text{ tel que } \det \mathrm{A} = \sup_{\mathrm{B}\in\mathcal{K}} \det \mathrm{B}}$

15. $\mathcal{C}$ est un compact en tant que sphère de $\mathbb{R}^2$.
Toutes normes sur $\mathbb{R}^2$ étant équivalentes entre elles, l'application $x \mapsto \|x\|$ est continue sur $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|\right)$.
Le théorème des bornes atteintes nous fournit $x_0 \in \mathcal{C}$ tel que $\forall x \in \mathcal{C},\ \|x\| \leqslant \|x_0\| = r$.
On a $r > 0$ car $x_0 \neq 0$ car $0 \notin \mathcal{C}$.
Soit $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on a $\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| \leqslant r$. D'où $\forall x \in \mathbb{R}^2$, on a $\left\|\frac{x}{r}\right\| \leqslant \|x\|_2$.
Ainsi $\frac{1}{r}\mathrm{I}_2 \in \mathcal{K}$ donc $\det(\mathrm{A}) \geqslant \det\left(\frac{1}{r}\mathrm{I}_2\right) = \frac{1}{r^2} > 0$
d'où $\boxed{\det \mathrm{A} > 0}$
Par l'absurde on suppose que $\forall x \in \mathcal{C},\ \|\mathrm{A}x\| \neq 1$.
On remarque tout d'abord que $\forall x \in \mathcal{C},\ \|\mathrm{A}x\| \leqslant \|x\|_2 = 1$ d'où $\forall x \in \mathcal{C},\ \|\mathrm{A}x\| < 1$
On note $\rho = \max_{x\in\mathcal{C}} \|\mathrm{A}x\|$ qui existe par continuité de $x \mapsto \|\mathrm{A}x\|$ et compacité de $\mathcal{C}$.
On a $\rho < 1$ et $\forall x \in \mathcal{C},\ \|\frac{1}{\rho}\mathrm{A}x\| \leqslant 1$
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \|\frac{1}{\rho}\mathrm{A}x\| \leqslant \|x\|_2$ donc $\frac{1}{\rho}\mathrm{A} \in \mathcal{K}$ or

$$\det\left(\frac{1}{\rho}\mathrm{A}\right) = \frac{\det(\mathrm{A})}{\rho^2} > \det(\mathrm{A}) > 0$$

Absurde par définition de A. Ainsi $\boxed{\text{il existe bien } x \in \mathcal{C} \text{ tel que } \|\mathrm{A}x\| = 1}$

16. $\mathrm{B} \in \mathrm{SO}\left(\mathbb{R}^2\right)$ telle que $x = \mathrm{B}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ existe bien ; c'est la matrice de rotation du plan $\mathbb{R}^2$ d'angle $\left(\widehat{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, x}\right)$.

(a) Soit $r \in]0, 1[$. On note $\mathrm{A}' = \mathrm{AB}$.
$\forall x \in \mathcal{C},\ \|\mathrm{A}x\| \leqslant 1$ et que $x \mapsto \mathrm{B}x$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ qui envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}$, on a
$\forall x \in \mathcal{C},\ \|\mathrm{A}'x\| = \|\mathrm{AB}x\| \leqslant 1$
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \|\mathrm{A}'x\| \leqslant \|x\|_2$
d'où $\mathrm{A}' \in \mathcal{K}$ et $\det(\mathrm{A}') = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{A}) = \sup_{\mathrm{B}\in\mathcal{K}} \det \mathrm{B}$.
De plus en prenant $x' = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ on a $x' \in \mathcal{C}$ et $\|\mathrm{A}'x'\| = 1$.
Par l'absurde on suppose : $\forall y \in \mathcal{C},\ \left\|\mathrm{A}'\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\end{pmatrix} y\right\| \leqslant 1$
Alors $\forall y \in \mathbb{R}^2,\ \left\|\mathrm{A}'\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\end{pmatrix} y\right\| \leqslant \|y\|_2$ d'où $\mathrm{A}'\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\end{pmatrix} \in \mathcal{K}$.
Ainsi $\forall t \in [0, 1],\ (1-t)\mathrm{A}' + t\mathrm{A}'\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\end{pmatrix} \in \mathcal{K}$ car $\mathcal{K}$ est convexe selon 14(a).

D'où $\forall t \in [0,1],\ \det\left[(1-t)\mathrm{A}' + t\mathrm{A}'\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\end{pmatrix}\right] \leqslant \det(\mathrm{A})$.

Comme $\det(\mathrm{A}') = \det(\mathrm{A}) > 0$, on a $\forall t \in [0,1],\ \det\left[(1-t)\mathrm{I}_2 + t\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\end{pmatrix}\right] \leqslant 1$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\det\left[(1-t)\mathrm{I}_2 + t\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\end{pmatrix}\right] = (1-t+tr)(1-t+t/r) = (2-r-1/r)t^2 + (r+1/r-2)t + 1$$

d'où $\forall t \in [0,1],\ (r+1/r-2)(t-t^2) \leqslant 0$.

En évaluant en $t = 1/2$, on trouve :

$$0 \geqslant r + 1/r - 2 = \frac{r^2+1-2r}{r} = \frac{(r-1)^2}{r}$$

donc $r = 1$. Absurde.

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } r \in]0,1[\text{ il existe bien } x_r \in \mathcal{C} \text{ tel que } \left\| \mathrm{AB}\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\end{pmatrix} x_r \right\| > 1}$

(b) On reprend les notations du (a) et on note $x_r = \begin{pmatrix} y_r \\ z_r \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$ qui convient.

Comme $\mathrm{A}' = \mathrm{AB} \in \mathcal{K}$, alors on a

$$1 < \left\| \mathrm{A}'\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\end{pmatrix} x_r \right\| = \left\| \mathrm{A}'\begin{pmatrix} ry_r \\ z_r/r \end{pmatrix} \right\| \leqslant \left\| \begin{pmatrix} ry_r \\ z_r/r \end{pmatrix} \right\|_2$$

donc $r^2 < r^4 y_r^2 + z_r^2$ et $y_r^2 = 1 - z_r^2$ car $x_r \in \mathcal{C}$

Ainsi $r^2 - r^4 < (1-r^4)z_r^2$ or $1 - r^2 > 0$ car $r \in]0,1[$.

donc $r^2 < (1+r^2)z_r^2$, d'où $\boxed{z_r^2 > \frac{r^2}{1+r^2}}$

17. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $r_n = 1 - 2^{-n-1}$ de sorte que $0 < r_n < 1$ et $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

La question précédente, me fournit $x_n = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$ tel que $1 < \left\| \mathrm{A}'\begin{pmatrix} r_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_n}\end{pmatrix} x_n \right\|$.

$\mathcal{C}$ étant compact,

la suite (x_n) admet une suite extraite convergente qui converge vers une valeur d'adhérence $x_\ell = \begin{pmatrix} y_\ell \\ z_\ell \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$

Pour simplifier les notations, on note (x_n) la suite extraite.

Par prolongement des inégalités et continuité du produit matriciel, on a

$$1 \leqslant \left\| \mathrm{A}'\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1}\end{pmatrix} x_\ell \right\| = \|\mathrm{A}' x_\ell\| \ \text{ et } z_\ell^2 \geqslant \frac{1^2}{1+1^2}$$

On remarque que $z_\ell \neq 0$ ainsi $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_\ell\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ constitué de vecteurs de $\mathcal{C}$ vérifiant

$$\left\| \mathrm{A}'\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \|\mathrm{A}' x_\ell\| = 1$$

B étant une matrice de rotation $(e_1, e_2) = \left(\mathrm{B}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{B}x_\ell\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ constitué de vecteurs de $\mathcal{C}$ vérifiant

$$\|\mathrm{A}e_1\| = \|\mathrm{A}e_2\| = 1 = \|e_1\|_2 = \|e_2\|_2$$

Il existe bien $\boxed{\text{une base } (e_1, e_2) \text{ de } \mathbb{R}^2 \text{ telle que } \|\mathrm{A}x\| = \|x\|_2 \text{ pour } x \in \{e_1, e_2\}}$

18. Soit $f \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$. On remarque que $\mathrm{T}' = f(\mathrm{T})$ est une partie fermée de $\mathcal{C}$ car T est compact en tant que fermé relatif au compact $\mathcal{C}$.
De plus pour tous $a, b \in \mathrm{T}'$ avec $b \notin \{-a, a\}$, on a que $\frac{b-a}{\|b-a\|_2}$ et $\frac{b+a}{\|b+a\|_2}$ appartiennent à T' car f^{-1} est une isométrie vectorielle.
De plus $f(x), f(y) \in \mathrm{T}'$ avec $f(y) \notin \{-f(x), f(x)\}$ car f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
Ainsi montrer que $\mathrm{T} = \mathcal{C}$ revient à montrer que $\mathrm{T}' = \mathcal{C}$.
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $u(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$.
On peut alors écrire $x = u(\theta_x)$ et $y = u(\theta_y)$.
Quitte à effectuer une rotation d'angle $-\dfrac{\theta_x + \theta_y}{2}$, à l'aide de la remarque, on peut supposer que $\theta_x = -\theta_y$.
On peut alors supposer que $x = u(\theta)$ et $y = u(-\theta)$ avec $\theta \in]0, \pi[\setminus \{\pi/2\}$, quitte à échanger x et y.
Quitte à effectuer la réflexion d'axe dirigée par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on suppose que $\theta \in]0, \pi/2[$.
Le calcul sur les affixes, $\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{|\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}|} = \dfrac{2\cos(\theta)}{|2\cos(\theta)|} = 1$, $\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{|\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}|} = \dfrac{2\mathrm{i}\sin(\theta)}{|2\mathrm{i}\sin(\theta)|} = \mathrm{i}$ et $\dfrac{\mathrm{e}^{-i\theta} - \mathrm{e}^{i\theta}}{|\mathrm{e}^{-i\theta} - \mathrm{e}^{i\theta}|} = -\mathrm{i}$, permet de montrer que

$$u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u(-\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{T}$$

Soit $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.
En utilisant le principe de la dichotomie, on va construire par récurrence deux suites (α_n) et (β_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_{n+1} \leqslant \theta \leqslant \beta_{n+1} \leqslant \beta_n \leqslant \frac{\pi}{2} (\star)$$

On pose $\alpha_0 = -\pi/2$ et $\beta_0 = \pi/2$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose α_n et β_n construits on pose $\gamma_n = \dfrac{\alpha_n + \beta_n}{2}$.
Si $\gamma_n \leqslant \theta$, on pose $\begin{cases} \alpha_{n+1} = \gamma_n \\ \beta_{n+1} = \beta_n \end{cases}$ et sinon $\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n \\ \beta_{n+1} = \gamma_n \end{cases}$.
Par récurrence l'inégalité $(\star)$ est vérifiée et la suite $(\beta_n - \alpha_n)$ est une suite géométrique de raison $1/2$, elle converge donc vers 0. De plus les suites α et β sont monotones de monotonies inverses, elles sont donc adjacentes.
Elle converge donc vers θ par prolongement des inégalités.
Comme $\forall a, b \in \mathrm{T}$, $b \notin \{-a, a\} \Longrightarrow \frac{b+a}{\|b+a\|_2} \in \mathrm{T}$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u(\alpha_n) \in \mathrm{T} \text{ et } u(\beta_n) \in \mathrm{T}$$

Comme $t \mapsto u(t)$ est continue, la suite $(u(\alpha_n))$ converge vers $u(\theta) \in \mathcal{C}$.
Comme T est fermé de $\mathcal{C}$, alors $u(\theta) \in \mathrm{T}$.
On vient de montrer que $\forall \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $u(\theta) \in \mathrm{T}$.
En utilisant cette fois-ci :

$$\forall a, b \in \mathrm{T},\ b \notin \{-a, a\} \Longrightarrow \left(\frac{b-a}{\|b-a\|_2} \in \mathrm{T} \text{ et } \frac{a-b}{\|a-b\|_2} \in \mathrm{T} \right)$$

On montre que $\forall \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $u(\theta + \pi/2) \in \mathrm{T}$ et $u(\theta - \pi/2) \in \mathrm{T}$.
Ainsi $\forall \theta \in [-\pi, \pi]$, $u(\theta) \in \mathrm{T}$.
D'où $\mathcal{C} \subset \mathrm{T}$ or on sait déjà que $\mathrm{T} \subset \mathcal{C}$.
On a bien $\boxed{\mathrm{T} = \mathcal{C}}$

19. On note $\mathrm{T} = \{x \in \mathcal{C} \mid \|\mathrm{A}x\| = 1\}$.
Comme $x \mapsto \|\mathrm{A}x\|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, alors T est une partie fermée de $\mathcal{C}$.
De plus selon 17, en posant $x = \dfrac{e_1}{\|e_1\|_2}$ et $y = \dfrac{e_2}{\|e_2\|_2}$, on a $x, y \in \mathrm{T}$ avec $y \notin \{-x, x\}$.
Soit $a, b \in \mathrm{T}$ tel que $b \notin \{-a, a\}$.
On a $\frac{b-a}{\|b-a\|_2} \in \mathcal{C}$ et $\frac{a+b}{\|a+b\|_2} \in \mathcal{C}$ et $\left\|\mathrm{A}\frac{b-a}{\|b-a\|_2}\right\| \leqslant 1$ et $\left\|\mathrm{A}\frac{a+b}{\|a+b\|_2}\right\| \leqslant 1$ car $\mathrm{A} \in \mathcal{K}$
D'où $\|\mathrm{A}b - \mathrm{A}a\| \leqslant \|b - a\|_2$ et $\|\mathrm{A}a + \mathrm{A}b\| \leqslant \|a + b\|_2$.
Ainsi comme $\|\mathrm{A}a\| = \|\mathrm{A}b\| = 1$ par hypothèse sur $\|\cdot\|$, on a

$$4 \leqslant \|\mathrm{A}b + \mathrm{A}a\|^2 + \|\mathrm{A}b - \mathrm{A}a\|^2 \leqslant \|b + a\|_2^2 + \|b - a\|_2^2 = 4$$

pour la dernière égalité, on a utilisé l'identité du parallélogramme avec la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$.
On en déduit que toutes les inégalités sont des égalités donc $\left\|\mathrm{A}\frac{b-a}{\|b-a\|_2}\right\| = 1$ et $\left\|\mathrm{A}\frac{a+b}{\|a+b\|_2}\right\| = 1$.
Par conséquent $\frac{b-a}{\|b-a\|_2} \in \mathrm{T}$ et $\frac{a+b}{\|a+b\|_2} \in \mathrm{T}$
Avec la question précédente, on obtient $\mathcal{C} = \mathrm{T} = \{x \in \mathcal{C} \mid \|\mathrm{A}x\| = 1\}$.
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \|\mathrm{A}x\| = \|x\|_2$ ou encore $\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \|x\| = \|\mathrm{A}^{-1}x\|_2$.
On pose $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$.
Pour $x, y \in \mathbb{R}^2$, on pose $\varphi(x, y) = \langle \mathrm{A}^{-1}x, \mathrm{A}^{-1}y \rangle$.
On montre facilement que φ est une forme symétrique bilinéaire définie positive, il s'agit donc d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
On remarque alors que $\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$.
Ainsi la norme $\|\cdot\|$ provient du produit scalaire φ.
On a démontré $\boxed{\text{le théorème A}}$

IV Algèbres valuées

20. (a) Soit $x \in \mathrm{A}$. On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$
On note $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{X} + a_0 \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
En utilisant la décomposition de P en facteurs irréductibles, on peut écrire

$$\mathrm{P} = \prod_{i=1}^{m} \mathrm{Q}_i(\mathrm{X})^{\alpha_i}$$

où les Q_i sont des polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ deux à deux distincts et les $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.
En utilisant le morphisme d'algèbres : $\mathbb{R}[\mathrm{X}] \to \mathrm{A}; \mathrm{R} \in \mathrm{R}(x)$. On a

$$\prod_{i=1}^{m} \mathrm{Q}_i(x)^{\alpha_i} = \mathrm{P}(x) = 0$$

Comme A est sans diviseur de zéro, cela nous fournit $i \in [\![1, m]\!]$ tel que $\mathrm{Q}_i(x) = 0$
On a alors $\deg(\mathrm{Q}_i) \in \{1, 2\}$.
Si $\deg(\mathrm{Q}_i) = 1$, on peut écrire $\mathrm{Q}_i = \mathrm{X} + b$ avec $b \in \mathbb{R}$ et on a $x^2 = b^2 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{R} + \mathbb{R}x$.
Si $\deg(\mathrm{Q}_i) = 1$, on peut écrire $\mathrm{Q}_i = \mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et on a $x^2 = -b - ax\mathbb{R} + \mathbb{R}x$.
Dans tous les cas, on a $\boxed{x^2 \in \mathbb{R} + \mathbb{R}x}$

(b) Soit $x \in \mathrm{A}\backslash\mathbb{R}$. Alors $(1,x)$ est une famille $\mathbb{R}$-libre de A et $\mathbb{R}+\mathbb{R}x = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1,x)$
Ainsi $(1,x)$ est une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{R}+\mathbb{R}x$.
En faisant comme en (a), on trouve $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, unitaire irréductible, de degré 2 tel que $\mathrm{Q}(x) = 0$.
Le polynôme Q admet une racine $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (l'autre étant $\bar{\alpha}$).
Ainsi $(1,\alpha)$ est une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}$.
On définit alors φ l'application $\mathbb{R}$-linéaire tel que $\varphi(1) = e$ et $\varphi(\alpha) = x$.
Ainsi φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{R}+\mathbb{R}x$ tel que $\varphi(1) = e$.
Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Il reste à établir que $\varphi(z_1z_2) = \varphi(z_1)\varphi(z_2)$.
On peut écrire $z_1 = a_1 + b_1\alpha$ et $z_2 = a_2 + b_2\alpha$ avec $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\varphi(z_1z_2) = a_1a_2e + (a_1b_2 + a_2b_1)x + b_1b_2\varphi(\alpha^2) \text{ et } \varphi(z_1)\varphi(z_2) = a_1a_2e + (a_1b_2 + a_2b_1)x + b_1b_2x^2$$

On écrit $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^2 + q_1\mathrm{X} + q_0$ avec $q_0, q_1 \in \mathbb{R}$ et on a $\varphi(\alpha^2) = \varphi(-q_1\alpha - q_0) = -q_1x - q_0e = x^2$.
Ainsi φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{R}+\mathbb{R}x$.
Ainsi $\boxed{\mathbb{R}+\mathbb{R}x \text{ est une } \mathbb{R}\text{-algèbre isomorphe à } \mathbb{C}}$

21. Comme A n'est pas isomorphe à $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{R}$-algèbre.
Comme l'application $\mathbb{R} \to \mathrm{A}$, $t \mapsto te$ est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres injectif alors l'image $\mathbb{R}_{\mathrm{A}}$ (identifiée à $\mathbb{R}$) est une sous-algèbre stricte de A. Cela nous fournit $x \in \mathrm{A} \setminus \mathbb{R}$.
Il existe alors $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}+\mathbb{R}x$ isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres.
En posant $\boxed{i_{\mathrm{A}} = \varphi(\mathrm{i}) \in \mathrm{A}, \text{ on a } i_{\mathrm{A}}^2 = \varphi(-1) = -e = -1}$

22. (a) On a $\boxed{\mathrm{T}(xy) = i_{\mathrm{A}}xi_{\mathrm{A}}^2yi_{\mathrm{A}} = -i_{\mathrm{A}}xyi_{\mathrm{A}} = -\mathrm{T}(x)\mathrm{T}(y) \text{ pour tous } x, y \in \mathrm{A}}$

(b) On a $\boxed{\mathrm{T}^2 = \mathrm{id}}$ car $\forall x \in \mathrm{A}, \mathrm{T}^2(x) = (-1)x(-1) = x$.
De plus $\mathrm{T} \in \mathrm{End}(\mathrm{A})$ car on observe que $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in \mathrm{A},\ \mathrm{T}(\lambda x + y) = \lambda\mathrm{T}(x) + \mathrm{T}(y)$.
Ainsi T est une $\mathbb{R}$-symétrie vectorielle de A d'où $\boxed{\mathrm{A} = \ker(\mathrm{T} - \mathrm{id}) \oplus \ker(\mathrm{T} + \mathrm{id})}$

23. On a $\mathrm{T}(1) + \mathrm{Id}(1) = i_{\mathrm{A}}^2 + 1 = 0$ et $\mathrm{T}(i_{\mathrm{A}}) + \mathrm{Id}(i_{\mathrm{A}}) = i_{\mathrm{A}}^3 + i_{\mathrm{A}} = 0$.
Ainsi 1 et $i_{\mathrm{A}} \in \ker(\mathrm{T} + \mathrm{id})$ or $(1, i_{\mathrm{A}})$ est une base de U (comme en 20(b)).
D'où $\mathrm{U} \subset \ker(\mathrm{T} + \mathrm{id})$.
Par l'absurde, supposons l'existence de $y \in \ker(\mathrm{T} + \mathrm{id}) \setminus \mathrm{U}$.
Alors comme $y \in \mathrm{A} \setminus \mathbb{R}$, alors $\mathbb{R}+\mathbb{R}y$ est une $\mathbb{R}$-algèbre isomorphe à $\mathbb{C}$.
Cela nous fournit $i_{\mathrm{B}} \in \mathbb{R}+\mathbb{R}y$, tel que $i_{\mathrm{B}}^2 = -1$. On a alors $i_{\mathrm{B}} \notin \mathbb{R}$.
Comme $\mathbb{R}+y\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}+i_{\mathrm{A}}\mathbb{R}$ sont des $\mathbb{R}$-plans vectoriels distincts, on a $(\mathbb{R}+y\mathbb{R}) \cap (\mathbb{R}+i_{\mathrm{A}}\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Ainsi $i_{\mathrm{A}} \neq i_{\mathrm{B}}$ et $i_{\mathrm{A}} \neq -i_{\mathrm{B}}$.
De plus comme $\ker(\mathrm{T} + \mathrm{id})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on a $i_{\mathrm{B}} \in \ker(\mathrm{T} + \mathrm{id})$ d'où $i_{\mathrm{A}}i_{\mathrm{B}} = i_{\mathrm{B}}i_{\mathrm{A}}$
Ainsi $0 = -1 + 1 = i_{\mathrm{A}}^2 - i_{\mathrm{B}}^2 = (i_{\mathrm{A}} - i_{\mathrm{B}})(i_{\mathrm{A}} + i_{\mathrm{B}})$ ce qui est absurde car A est sans diviseur de zéro.
Ainsi $\boxed{\ker(\mathrm{T} + \mathrm{id}) = \mathrm{U}}$
Comme U est isomorphe à $\mathbb{C}$ et que A ne l'est pas alors $\mathrm{A} \neq \mathrm{U}$ Ainsi $\boxed{\ker(\mathrm{T} - \mathrm{id}) \neq \{0\}}$

24. (a) Soit $x \in \ker(\mathrm{T} - \mathrm{id})$. En utilisant 22(a), on a

$$\mathrm{T}(\beta x) = -\mathrm{T}(\beta)\mathrm{T}(x) = -(\beta)(x) = -(\beta x)$$

d'où $\beta x \in \ker(\mathrm{T} + \mathrm{id})$. Ainsi $\boxed{x \mapsto \beta x \text{ envoie } \ker(\mathrm{T} - \mathrm{id}) \text{ dans } \ker(\mathrm{T} + \mathrm{id})}$
Ainsi $\boxed{\beta^2 = \beta \times \beta \in \ker(\mathrm{T} + \mathrm{id}) = \mathrm{U}}$
L'application $x \mapsto \beta x$ est $\mathbb{R}$-linéaire et injective car A est sans diviseur de 0.
Ainsi $\ker(\mathrm{T} - \mathrm{id})$ est de dimension finie 1 ou 2 car $\neq \{0\}$ selon 23.
Par un calcul analogue à ci-dessus, $x \mapsto \beta x$ envoie $\ker(\mathrm{T} + \mathrm{id})$ dans $\ker(\mathrm{T} - \mathrm{id})$.
D'où $\ker(\mathrm{T} - \mathrm{id})$ est un $\mathbb{R}$-plan vectoriel.
On a alors $\beta\mathrm{U} \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{T} - \mathrm{id})$ et égalité de dimension, on en déduit que $\boxed{\ker(\mathrm{T} - \mathrm{id}) = \beta\mathrm{U}}$

(b) On a $\beta \notin \mathrm{U}$ car $\mathrm{U} \cap \ker(\mathrm{T} - \mathrm{id}) = \{0\}$ selon 22(b).
Par l'absurde si $\beta^2 \in \mathbb{R}^+$, alors cela nous fournit $b \in \mathbb{R}$ tel que $b^2 = \beta^2$.
Or $\beta b = b\beta$ car $b \in \mathbb{R}$ d'où $(b - \beta)(b + \beta) = 0$ ainsi $\beta \in \mathbb{R} \subset \mathrm{U}$. Absurde.
De plus $\beta^2 \in \mathbb{R} + \mathbb{R}\beta$ selon 20(b) et selon (a), on a $\beta^2 \in \mathrm{U}$.
Or $\mathbb{R} \subset \mathrm{U} \cap (\mathbb{R} + \mathbb{R}\beta)$ (intersection de plan distincts) donc $\beta^2 \in \mathbb{R} = \mathrm{U} \cap (\mathbb{R} + \mathbb{R}\beta)$
On conclut que $\boxed{\beta^2 \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R}^+) =]-\infty, 0[}$

(c) Pour démontrer le théorème B, il suffit de montrer que A est une $\mathbb{R}$-algèbre isomorphe à $\mathbb{H}$. Je note $j_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{\sqrt{-\beta^2}}\beta$ et $k_{\mathrm{A}} = -j_{\mathrm{A}} i_{\mathrm{A}}$. Comme $\dfrac{1}{\sqrt{-\beta^2}} \in \mathbb{R}^*$, on peut considérer $x \mapsto j_{\mathrm{A}} x$ au lieu de $x \mapsto \beta x$.
On a alors $j_{\mathrm{A}}\mathrm{U} = \ker(\mathrm{T} - \mathrm{id})$ et $\mathrm{A} = \mathrm{U} \bigoplus \ker(\mathrm{T} - \mathrm{id})$. Ainsi $(1, i_{\mathrm{A}}, j_{\mathrm{A}}, k_{\mathrm{A}})$ est une base de A.
Je pose φ l'application linéaire $\mathbb{H} \to \mathrm{A}$ qui envoie la base $(\mathrm{E}, \mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K})$ sur $(1, i_{\mathrm{A}}, j_{\mathrm{A}}, k_{\mathrm{A}})$.
Il s'agit d'un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
Pour montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres il suffit de montrer que la table de multiplication sur $\{1, i_{\mathrm{A}}, j_{\mathrm{A}}, k_{\mathrm{A}}\}$ est « isomorphe » à celle de $\{\mathrm{E}, \mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}\}$.
Comme 1 et E sont les neutres, il suffit de le faire entre $\{i_{\mathrm{A}}, j_{\mathrm{A}}, k_{\mathrm{A}}\}$ et $\{\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}\}$.
On a $i_{\mathrm{A}}^2 = j_{\mathrm{A}}^2 = -1$ et $k_{\mathrm{A}}^2 = j_{\mathrm{A}} i_{\mathrm{A}} j_{\mathrm{A}} i_{\mathrm{A}} = j_{\mathrm{A}} \mathrm{T}(j_{\mathrm{A}}) = j_{\mathrm{A}} j_{\mathrm{A}} = -1$.
Comme $j_{\mathrm{A}} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{T} - \mathrm{id})$, on a $i_{\mathrm{A}} j_{\mathrm{A}} i_{\mathrm{A}} = j_{\mathrm{A}}$ donc $i_{\mathrm{A}} j_{\mathrm{A}} = j_{\mathrm{A}}(-i_{\mathrm{A}}) = k_{\mathrm{A}}$.
Enfin $k_{\mathrm{A}} i_{\mathrm{A}} = j_{\mathrm{A}}$ et $j_{\mathrm{A}} k_{\mathrm{A}} = i_{\mathrm{A}}$ et aussi $i_{\mathrm{A}} k_{\mathrm{A}} = i_{\mathrm{A}} j_{\mathrm{A}}(-i_{\mathrm{A}}) = -k_{\mathrm{A}} i_{\mathrm{A}} = -j_{\mathrm{A}}$
En conclusion, $\boxed{\text{on a montré le théorème B}}$

25. Comme $\mathrm{V} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(x, y)$ est de dimension 2, alors (x, y) en est une base.
On remarque que $\forall u, v \in \mathrm{V},\ uv = vu$ en décomposant sur la base (x, y) car $xy = yx$.
On a alors $(u + v)^2 - (u - v)^2 = 4uv$ On a alors par inégalité triangulaire

$$\|4uv\| \leqslant \|(u + v)^2\| + \|(u - v)^2\|$$

Avec la multiplicativité de la norme et par homogénéité, on a $\boxed{\forall u, v \in \mathrm{V},\ \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 \geqslant 4\|u\| \cdot \|v\|}$
Si $\|u\| = \|v\| = 1$, on obtient $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 \geqslant 4$.
Via le théorème A de la partie III et un isomorphisme entre V et $\mathbb{R}^2$, on peut conclure que

$$\boxed{\text{la restriction de } \|\cdot\| \text{ à V provient d'un produit scalaire sur V}}$$

26. Si $x \in \mathbb{R}$, alors $x^2 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{R} + \mathbb{R}x$.
Sinon, $(1, x)$ est $\mathbb{R}$-libre et $\mathbb{R} \subset \mathbb{R} + \mathbb{R}x$ est un plan sur le quel $\|\cdot\|$ provient d'un produit scalaire.
Comme $\|1\| = \|1^2\| = \|1\|^2$, on a $\|1\| = 1$, et on dispose de $i_x \in \mathbb{R} + \mathbb{R}x$ de sorte que $(1, i_x)$ soit une base orthonormée de $\mathbb{R} + \mathbb{R}x$. Il suffit alors d'établir que $i_x^2 \in \mathbb{R} + \mathbb{R}x$ pour conclure.
Par l'absurde, on suppose que $i_x^2 \notin \mathbb{R} + \mathbb{R}x$. Comme i_x et 1 sont unitaires, on a :

$$4 = \|i_x - 1\|^2 + \|i_x + 1\|^2 = \|i_x^2 + 1 - 2i_x\| + \|i_x^2 + 1 + 2i_x\|$$

Je pose $z = i_x^2 + 1$ et on a $\|(2i_x + z) + (2i_x - z)\| = \|2i_x + z\| + \|2i_x - z\|$
Il existe un plan contenant z et $2i_x$ sur lequel la norme provient d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.
En élevant au carré, on a $(2i_x + z | 2i_x - z) = \|2i_x + z\| \cdot \|2i_x - z\|$
Alors selon Cauchy-Schwarz, la famille $(z + 2i_x, z - 2i_x) = (i_x^2 + 1 + 2i_x, i_x^2 + 1 - 2i_x)$ est liée
ce qui nous fournit $k \in \mathbb{R}$ tel que $i_x^2 + 1 + 2i_x = k(i_x^2 + 1 - 2i_x)$ car $i_x^2 + 1 + 2i_x \neq 0$ car $i_x^2 \notin \mathbb{R} + \mathbb{R}x$.
d'où $(1 - k)i_x^2 = (k - 1)1 - 2(k + 1)i_x$. Comme $i_x^2 \notin \mathbb{R} + \mathbb{R}x$, alors $1 = k$ d'où $-4i_x = 0$. Absurde !
Ainsi $\boxed{x^2 \in \mathbb{R} + \mathbb{R}x \text{ pour tout } x \in \mathrm{A}}$

27. D'après la question précédente A est une $\mathbb{R}$-algèbre algébrique et sans diviseur de zéro,
car $\forall x, y \in \mathrm{A} \setminus \{0\},\ \|xy\| = \|x\| \cdot \|y\| > 0$
Ainsi A est isomorphe à $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ selon le théorème B.
On a ainsi prouvé $\boxed{\text{le théorème C}}$