Exemple rapide

La fonction $\begin{vmatrix} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \sin(xy) \end{vmatrix}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Dites pourquoi.

C'est la composée des deux fonctions :

$$\left\| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto xy \end{array} \right.$$

et

$$\left\| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \sin t \end{array} \right.$$

qui sont continues ; $(x,y) \mapsto xy$ continue

sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.

Exemple 1

La fonction $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2+1} \end{array} \right.$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Dites pourquoi.

Exemple 2

La fonction $\left| \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \dfrac{1}{\det(A)} \end{array} \right.$ est continue sur $GL_n(\mathbb{K})$. Dites pourquoi

Solu :

$\rightsquigarrow$ $\det : A \mapsto \det(A)$ est continue sur $GL_n(\mathbb{K})$

$\rightsquigarrow$ $\forall A \in GL_n(\mathbb{K})$, $\det(A) \neq 0$

D'où $A \mapsto \dfrac{1}{\det(A)}$ continue sur $GL_n(\mathbb{K})$

Exemple 2

L'application $\left|\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & \mathrm{Com}(A) \end{array}\right.$ est continue sur $M_n(\mathbb{K})$

Détailler pourquoi.

Exercice d'application 1

$\mathcal{E} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$, où $0 < a < b$ fixés.

Montrer que $\mathcal{E}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$

Exercice d'application 2

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1) Montrer que C_f, la courbe de f, est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que $\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y < f(x) \right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice d'application 3

Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de l'evn $M_n(\mathbb{K})$.

Pr. ELAMIRI   Cours disp

Exercice d'application 1

$\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$, où $0 < a < b$ fixés.

Montrer que $\mathcal{E}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$

Exercice d'application 2

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1) Montrer que C_f, la courbe de f, est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y < f(x)\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice d'application 3

Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de l'evn $M_n(\mathbb{K})$

$\boxed{\text{Sol - Ex 1}}$.

$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \end{array}$

$(x,y) \in \mathcal{E} \iff \underbrace{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}_{=f(x,y)} = 1$

$\iff f(x,y) = 1$

$\iff f(x,y) \in \{1\}$ A

$\iff (x,y) \in f^{-1}(\{1\})$

D'où $\mathcal{E} = f^{-1}(\{1\})$

$\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ (singleton)

f continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale

D'où $f^{-1}(\{1\})$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ $\boxed{\text{Fin}}$

Rappel

$t \in f^{-1}(A) \overset{\text{déf}}{\iff} f(t) \in A$

Exercice d'application 1

Soit $\phi : C([a,b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \longmapsto \int_a^b f(t)\,dt = \phi(f)$$

Montrer que ϕ est continue sur $C([a,b], \mathbb{R})$ pour chacune des trois normes usuelles : $\|\ \|_\infty$, $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$.

Exercice d'application 1

Soit $\phi : C([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \longmapsto \int_a^b f(t)\,dt = \phi(f)$$

Montrer que ϕ est continue sur $\|\ \|$ sur $C([a,b],\mathbb{R})$ pour chacune des trois normes usuelles : $\|\ \|_\infty$, $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$.

19/45

$\boxed{\text{Sol - Ex 1}}$ a) Pour $\|\ \|_\infty$:

ϕ est bien linéaire.

Soit $f \in C([a,b],\mathbb{R})$. On a :

$$|\phi(f)| = \left|\int_a^b f(t)\,dt\right|$$

$$\leq \int_a^b \underbrace{|f(t)|}_{\leq \|f\|_\infty} dt$$

$$\leq \int_a^b \|f\|_\infty\,dt$$

$$= \underbrace{(b-a)}_{=C>0} \cdot \|f\|_\infty$$

$\Rightarrow \phi$ continue sur $C([a,b],\mathbb{R})$ pour $\|\ \|_\infty$.

Exercice d'application 1

Soit $\phi : C([a,b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \longmapsto \int_a^b f(t)\,dt = \phi(f)$$

Montrer que ϕ est continue sur l'evn $C([a,b], \mathbb{R})$ pour chacune des trois normes usuelles : $\| \ \|_\infty$, $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$.

19/45

$\boxed{\text{Sol - Ex 1}}$ a) Pour $\| \ \|_1$:

ϕ est bien linéaire.

Soit $f \in C([a,b], \mathbb{R})$. On a :

$$|\phi(f)| = \left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt = 1 \cdot \|f\|_1$$

$\hookrightarrow c = 1 \geq 0$

$\Rightarrow \phi$ continue sur $C([a,b], \mathbb{R})$ pour $\| \ \|_1$.

Scanned with CamScanner

$f, g \in C([a,b], \mathbb{R})$

In_C_Sch

$$\left|\int_a^b f g\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2}$$

$\boxed{\text{Sol\_Ex 1}}$ a) Pour $\| \|_2$:

ϕ est bien linéaire.

Soit $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ On a :

$$|\phi(f)| = \left|\int_a^b f(t) \times 1 \, dt\right|$$

$$\leq \sqrt{\int_a^b f^2} \times \sqrt{\int_a^b 1^2}$$

ineg_C_Sch

$$= \underbrace{\sqrt{b-a}}_{= C \geq 0} \cdot \|f\|_2$$

$\Rightarrow \phi$ continue sur $C([a,b], \mathbb{R})$ pour $\| \|_2$.

Exercice d'application 2

Soit $\varphi : C([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \longmapsto f(1)$$

1) Montrer que φ est continue sur l'evn $C([0,1], \mathbb{R})$ pour $\| \ \|_\infty$ mais ne l'est pas pour $\| \ \|_1$.

2) Que peut-on conclure ?