# Correction du prob 1

## Partie I :

1) $C_n^k = \underbrace{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}} \leq \frac{n^k}{k!} \leq n^k$

2) $\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{n^k}\alpha^k \leq \sum_{k=0}^{n} \alpha^k$ (d'après 1°)

$\Rightarrow \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n \leq \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha}$ $\left(\text{car } \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \geq 0\right)$ ; $\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n \geq 1$ est clair

3) Supposons que $0 \leq x \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}$ ; posons $\alpha = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}$.

on a $0 \leq x \leq \alpha$, et $0 < \alpha < 1$

et on a aussi $1 \leq 1 + \frac{x}{n} \leq 1 + \frac{\alpha}{n}$

$\Rightarrow \quad 1 \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \underbrace{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n}_{\leq \frac{1}{1-\alpha} \text{ d'après } 2°)}$

or $\frac{1}{1-\alpha} = 1+\varepsilon$, d'où $1 \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq 1+\varepsilon$.

4) Supposons que $\lim_{n\to+\infty} n\alpha_n = 0$, et que : $(\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \geq 0)$

a) 1) Appliquons la définition de « $\lim_{n\to+\infty} n\alpha_n = 0$ » pour $\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$, on a : $\exists n_0 \geq 1, \forall n \geq n_0, \underbrace{|n\alpha_n|}_{= n\alpha_n \text{ puisque positif}} \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$

a) 2) D'après 3°) et puisque $0 \leq n\alpha_n \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, on a

$\forall n \geq n_0, \quad 1 \leq \left(1 + \frac{n\alpha_n}{n}\right)^n \leq 1+\varepsilon$

c.à.d $1 \leq (1+\alpha_n)^n \leq 1+\varepsilon$, pour tout $n \geq n_0$.

$\Rightarrow \forall n \geq n_0, \quad 0 \leq (1+\alpha_n)^n - 1 \leq \varepsilon$

a) 3) Conclusion :

On a : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq 1, \forall n \geq n_0, \ \underbrace{(1+\alpha_n)^n - 1}_{= |(1+\alpha_n)^n - 1|,\ \text{car } (1+\alpha_n)^n \geq 1} \leq \varepsilon$

D'où $\lim_{n \to +\infty} (1+\alpha_n)^n = 1$

b) On a $\lim_{n \to +\infty} n\alpha_n = 0$.

et on a $\alpha_n = \underbrace{(n\alpha_n)}_{\to 0} \times \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$,

D'autre part, $\lim_{n \to +\infty} (1+\alpha_n)^n = \lim_n e^{n \ln(1+\alpha_n)} = \lim_n e^{n\alpha_n \cdot \frac{\ln(1+\alpha_n)}{\alpha_n}}$

$\left( \lim_n n\alpha_n = 0 \text{ et } \lim_n \left( \frac{\ln(1+\alpha_n)}{\alpha_n} \right) = 1 \right) \Rightarrow \lim_n (1+\alpha_n)^n = 1.$

## Partie II

1) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^k \times 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$

2) Soit $k \in \mathbb{N}$. M-que $\lim_{n \to +\infty} \frac{C_n^k}{2^n} = 0$.

$\forall n \geq k$, On a $0 \leq C_n^k \leq n^k$

$\Rightarrow \forall n \geq k, \quad 0 \leq \frac{C_n^k}{2^n} \leq \frac{n^k}{2^n}$

or $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^k}{2^n} = 0$ ; car l'exponentielle l'emporte sur la puissance

alors grâce au théorème des gendarmes, $\lim_n \frac{C_n^k}{2^n} = 0$.

3) Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

Pour tout $0 \leq k \leq n_0$, $\lim_n \frac{C_n^k}{2^n} = 0$ (d'après 2°)

D'où $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n_0} \left( \frac{C_n^k}{2^n} \right) = 0$ (En tant que somme de suites convergeant vers 0)

càd $\frac{1}{2^n} \cdot \left( \sum_{k=0}^{n_0} C_n^k \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

4) a) $\lim_{n} U_n = 0$, alors pour $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$\forall n \geq n_0$, $|U_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. (la définition de la convergence)

b) On a $\left(A \cdot \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n_0} C_n^k\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ d'après 3°/

alors pour $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_1, \underbrace{\left| \frac{A}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n_0} C_n^k \right|}_{= \frac{A}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n_0} C_n^k \text{, puisque positif.}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

c) $n_2 = \max(n_0, n_1)$.

Soit $n \geq n_2$, On a $n \geq n_0$ et $n \geq n_1$ :

$$\Rightarrow \begin{cases} |U_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pour tout } k \geq n \\ \frac{A}{2^n} \sum_{k=0}^{n_0} C_n^k \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}, \text{ d'après a°/ et b°/.}$$

D'autre part, On a :

$$|v_n| = \frac{1}{2^n} \left| \sum_{k=0}^{n} C_n^k U_k \right| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k |U_k|$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n_0} C_n^k \cdot \underbrace{|U_k|}_{\leq A} + \frac{1}{2^n} \sum_{k=n_0}^{n} C_n^k \underbrace{|U_k|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}}$$

or $\forall k = 0, \dots, n_0$, $|U_k| \leq \max_{0 \leq k \leq n_0}(|U_k|) = A$, et $\forall k \geq n_0$, $|U_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$$\text{D'où } |v_n| \leq \underbrace{\frac{A}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n_0} C_n^k}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=n_0}^{n} C_n^k$$

Or $\sum_{k=n_0}^{n} C_n^k \leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$, D'où $\frac{1}{2^n} \sum_{k=n_0}^{n} C_n^k \leq 1$

$\Rightarrow |v_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, et ceci pour tout $n \geq n_2$.

d) Conclusion :

On a ainsi : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |v_n| \leq \varepsilon$

ce qui traduit le fait que : $\lim_n v_n = 0$

5°) Posons : $\forall n \in \mathbb{N}, \; U_n = (-1)^n_n$.

alors : $\forall n \geq 1, \; v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k . 1^{n-k} = \frac{1}{2^n} \times (-1+1)^n = 0$

d'où $\lim_n v_n = 0$.

Mais on n'a pas que $\lim_n U_n = 0$ ; la suite $(U_n)$ n'a même pas de limite !

## Problème 2

### Partie I

1°) $f^m \circ f^n = f^{m+n}$

2) Supposons que $(U_n)$ converge, et m.q. que $(U_n)$ est de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$.

Pour $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, et puisque $(U_n)$ converge (soit $l$ sa limite), alors :

$\exists N \in \mathbb{N} / \; \forall n \geq N, \; |U_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

d'où pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq N$ et $q \geq N$, on a :

$$|U_p - U_q| = |U_p - l + l - U_q| \leq \underbrace{|U_p - l|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|U_q - l|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \leq \varepsilon$$

Enfin : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N$, on a $|U_p - U_q| \leq \varepsilon$

3) $H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

D'autre part, $\forall n+1 \leq k \leq 2n$, on a $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$

$$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \times n = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$$