Fonctions Convexes
Résumé

Ici $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, où I intervalle de $\mathbb{R}$.

Fonction Convexe sur I.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f Convexe sur I

2) $\forall x, y \in I$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

3) $\forall x, y \in I$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ avec $\lambda + \mu = 1$, on a :

$$f(\lambda x + \mu y) \leqslant \lambda f(x) + \mu f(y)$$

4) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x_1, \dots, x_n \in I$, $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Cas particuliers intéressants quand f est Convexe

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Fonction Concave sur I.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f Concave sur I

2) $\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x+(1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$

3) $\forall x, y \in I, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ avec $\lambda+\mu=1$, on a :

$$f(\lambda x+\mu y) \geqslant \lambda f(x)+\mu f(y)$$

4) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_n \in I, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Cas particuliers intéressants quand f est Concave

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

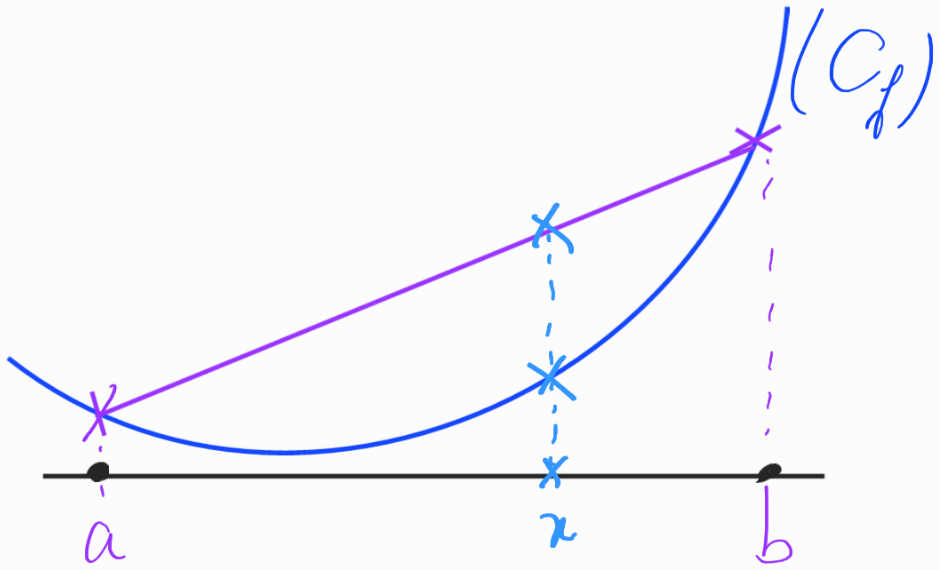
$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Proposition

f est Convexe sur I si et ssi toutes les Cordes de (C_f) sont au-dessus de celle-ci.

Autrement dit

$$\forall a<b\in I,\ \forall x\in[a,b],\ f(x)\leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

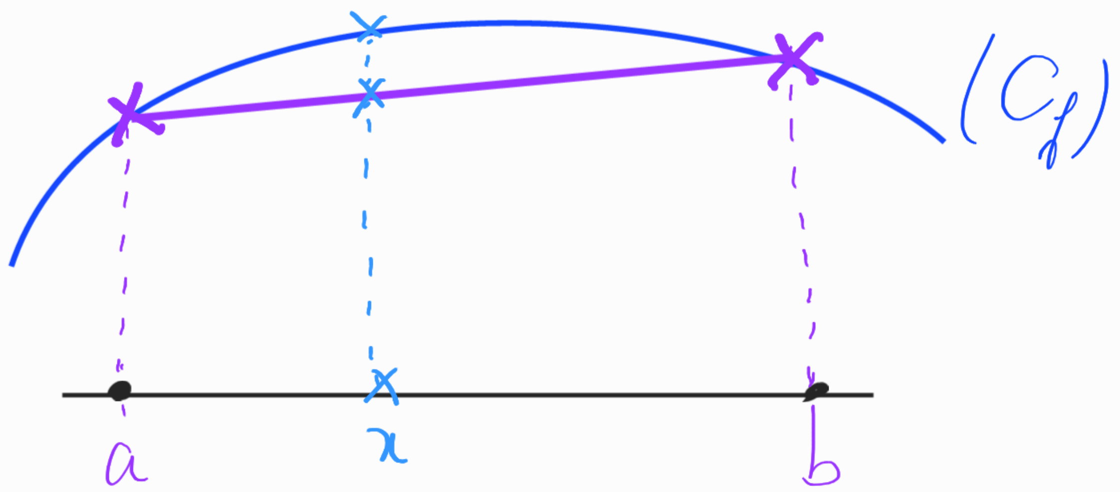


Proposition

f est **concave** sur I si et ssi toutes les **cordes** de (C_f) sont **au-dessous** de celle-ci.

Autrement dit

$$\forall a<b\in I,\ \forall x\in[a,b],\ f(x)\geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$



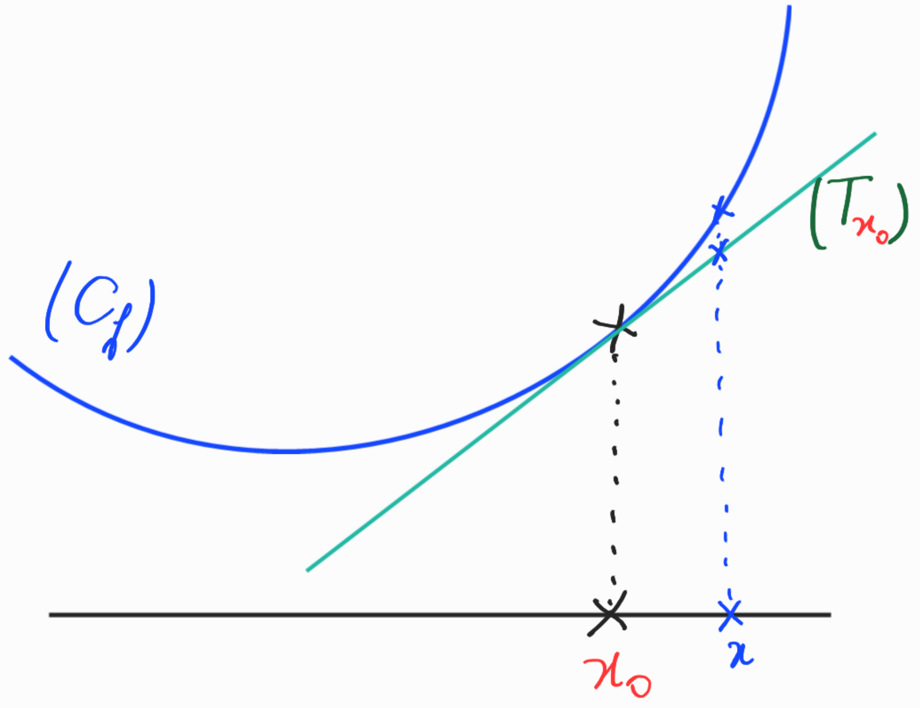
Proposition

Supposons que f est dérivable et convexe sur I,

Alors les tangentes à la courbe (C_f) sont en dessous de celle-ci.

Autrement dit

$$\forall x_0 \in I,\ \forall x \in I,\ f(x) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



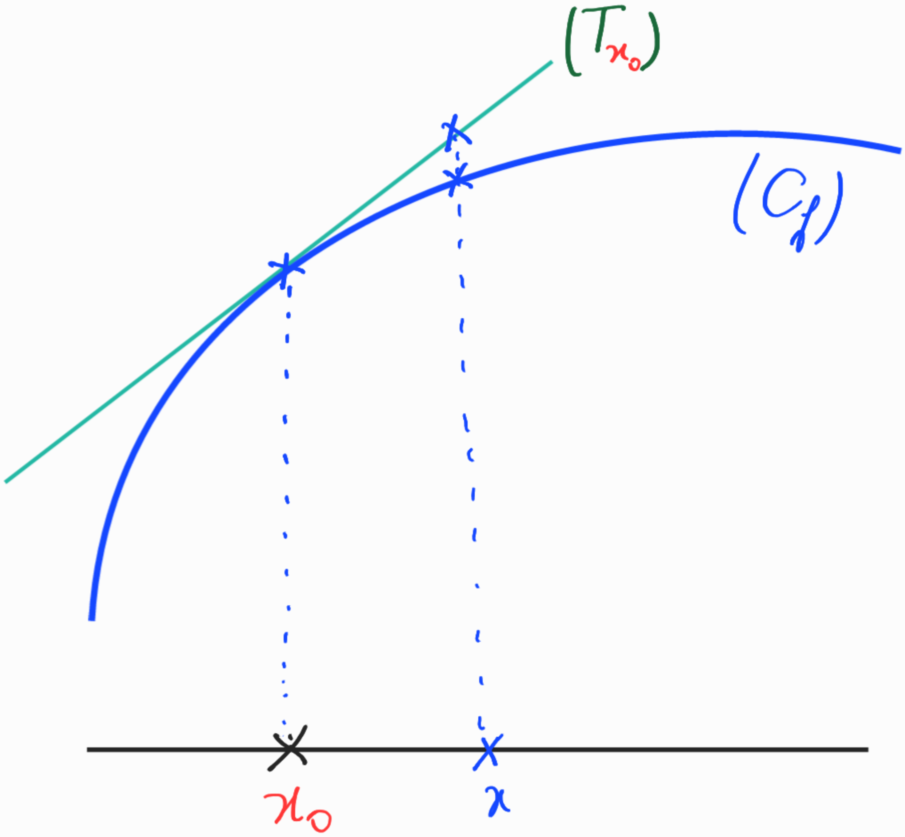
Proposition

Supposons que f est dérivable et concave sur I,

Alors les tangentes à la courbe (C_f) sont en dessus de celle-ci.

Autrement dit

$$\forall x_0 \in I,\ \forall x \in I,\ f(x) \leqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



Proposition

Supposons que $f \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{R})$. On a :

$$\left(f \text{ convexe sur } I\right) \Longleftrightarrow \left(\forall x \in I,\ f''(x) \geqslant 0\right)$$

$$\left(f \text{ concave sur } I\right) \Longleftrightarrow \left(\forall x \in I,\ f''(x) \leqslant 0\right)$$

Fonctions usuelles convexes ou concaves à savoir

ln est concave sur $]0, +\infty[$

exp est convexe sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$ est convexes sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $]0, +\infty[$

Cos est concave sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\left(\left[0, \pi/2\right]\right)$

ch est convexe sur $\mathbb{R}$

Sin est concave sur $[0, \pi]$ $\left(\left[0, \pi/2\right]\right)$

sh est convexe sur $[0, +\infty[$

Fin