Limites et Continuité

Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$ 3) $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$ 4) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{\lfloor x\rfloor}{x}$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor + x}{\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor - x}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$ 7) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ 8) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)$

Exercice 2 :

Dans chacun des cas suivants, la fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

1) $f(x) = x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$ 2) $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 3) $f(x) = x^2\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$ 4) $f(x) = \frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$

5) $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ 6) $f(x) = x^{10}e^{\frac{1}{x}}$ 7) $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$ 8) $f(x) = x\left|x+\frac{1}{x}\right|$

Exercice 3 :

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$.
f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
Indice : Vous pouvez considérer les suites $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$.

Exercice 4 :

Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$f(x) = \lfloor x\rfloor - (x - \lfloor x\rfloor)^2$.
$\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière de x.

Exercice 5 :

Montrer que la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de continuité de f .

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} \ si \ x \neq 0 \\ 0 \ si \ x = 0 \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^n-1-nx}{x^2} \ si \ x \neq 0 \\ 0 \ si \ x = 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x-1|}\, e^{\frac{1}{x}} \ si \ x \neq 0 \\ 0 \ si \ x = 0 \end{cases}$ 4) $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \ si \ x \neq 0 \\ 0 \ si \ x = 0 \end{cases}$

n étant un entier ≥ 2.

Exercice 7 :
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble sur lequel f est définie et continue.

$$1)\ f(x)=\frac{x\sin(x)}{x^2-1}\quad 2)\ f(x)=x^{x+1}\quad 3)\ f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

Exercice 8 :
Soit $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, continue en 0 et vérifiant

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=f(2x)$$

1) Montrer que
   i) $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=f\left(2^n x\right)$
   ii) $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=f\left(\frac{x}{2^n}\right)$
2) En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 :
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Considérons la fonction $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=x-\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{x+k}{n}\right\rfloor$$

1) Montrer que f est 1-périodique.
2) Simplifier $f(x)$ quand $x\in[0,1[$.
3) En déduire que
$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=x-\lfloor x\rfloor$$

Exercice 10 :
On se propose de déterminer toutes les fonctions $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ continues et vérifiant

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\ f(x+y)=f(x)+f(y)$$

Posons $a=f(1)$. Soit f une telle fonction.
1) Montrer que $f(0)=0$ et que f est impaire.
2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, on a $f(nx)=nf(x)$ et que $f(n)=an$.
3) Monter que
$$\forall r\in\mathbb{Q},\ f(r)=ar$$
4) En déduire que
$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=ax$$

Indice : Vous pouvez utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

5) Conclure.

Exercice 11 :

On se propose de déterminer toutes les fonctions $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ continues et vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$$

1) Que vaut $f(0) = 0$? Que dire de la parité de f ?
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $f(nx) = n^2 f(x)$.
3) Monter que
$$\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = f(1)r^2$$
4) En déduire que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(1)x^2$$
5) Conclure.

Exercice 12 :

Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ continue en 0 et en 1, vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x)$$

1) Que dire de la parité de f ?
2) Soit $x > 0$. Montrer que
   i) $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(x^{2^n})$
   ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(x^{\frac{1}{2^n}})$
3) En déduire que f est constante.

Exercice 13 :

1) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que
$$\exists c \in \mathbb{R},\ f(c) = 0$$
2) En déduire que toute fonction polynomiale à coéfficients réels et de degré impair possède au moins une racine réelle.

Exercice 14 :

Soit f une fonction continue d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ vers lui-même.
Montrer que f admet au moins un point fixe ; (càd $\exists x_0 \in [a, b],\ f(x_0) = x_0$)
Indice : vous pouvez considérer la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.

Exercice 15 :

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ telle $(\forall x \in [a, b],\ f(x) > 0)$.
Montrer que f est minorée par un réel strictement positif ; càd

$$\exists m > 0,\ \forall x \in [a, b],\ f(x) \geq m$$