

# CONCOURS COMMUN 2006

## DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

---

### Épreuve de Mathématiques (toutes filières)

**Jeudi 11 mai 2006 de 14h00 à 18h00**

## EXTRAIT

### PREMIER PROBLÈME

$\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des nombres réels. On notera  $M_2(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On rappelle que  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et  $\times$  désigne la multiplication des matrices.

$\mathbb{C}$  désigne l'ensemble des complexes. On notera  $|z|$  le module d'un complexe  $z$ .

Les différentes parties de ce problème ont un lien entre elles mais peuvent être traitées séparément.

#### **Étude d'une fonction.**

Soit  $f$  la fonction qui à un complexe  $z$  associe, lorsque c'est possible,  $f(z) = \frac{z^2}{z - 2i}$ .

1. Déterminer le domaine de définition  $D$  de  $f$
2. **a.** Déterminer les racines carrées complexes de  $8 - 6i$ .  
**b.** En déduire tous les antécédents de  $1 + i$  par  $f$ .
3. Soit  $h$  un complexe. Discuter suivant les valeurs de  $h$  le nombre d'antécédents de  $h$  par  $f$ .
4. Déterminer l'image  $f(D)$  de  $D$  par  $f$ . La fonction  $f$  est-elle une application surjective de  $D$  dans  $\mathbb{C}$  ?
5.  $f$  est-elle une application injective de  $D$  dans  $\mathbb{C}$  ?

Soit  $g$  l'application définie sur  $D$  à valeur dans  $\mathbb{C}$  et telle que :

$$\forall z \in D, g(z) = |z - 2i|^2 \frac{z^2}{z - 2i} + z^3$$

6. Soit  $z$  un complexe appartenant à  $D$  de partie réelle  $x$  et de partie imaginaire  $y$ . Trouver la partie réelle et la partie imaginaire de  $g(z)$ . Montrer en particulier que la partie réelle de  $g(z)$  est :  $2x^3 - 2xy^2 - 4xy$ .

### Étude d'un polynôme.

Soit  $a$  un entier naturel. Soit  $P_a$  la fonction polynôme définie sur  $\mathbb{R}$  par :  
 $\forall t \in \mathbb{R}, P_a(t) = t^3 - t(a^2 + 2a) + 2$ .

Le but de cette partie est de trouver  $a$  tel que  $P_a$  possède trois racines dans  $\mathbb{Z}$ .

On suppose que  $a$  existe. Soient  $t_1, t_2, t_3$  les 3 racines de  $P_a$  avec  $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ .

9. Que valent  $t_1 + t_2 + t_3$  et  $t_1 t_2 t_3$  ?

10. Calculer  $P_a(0)$  et en déduire que  $t_1 < 0$ .

11. Déduire du 9. et du 10. que  $t_1 \leq 0 \leq t_2 \leq t_3 \leq -t_1$  puis les valeurs de  $t_1, t_2, t_3$ .

12. Montrer que  $P'_a(t_2) = 0$ . En déduire la valeur de  $a$ .

13. Réciproquement, montrer que la valeur de  $a$  ainsi trouvée convient bien.

### Étude de deux ensembles de matrices.

Soit  $(x, y)$  un élément quelconque de  $\mathbb{R}^2$ . On note  $M_{x,y}$  la matrice  $\begin{pmatrix} x-y & y \\ 2 & x+y \end{pmatrix}$ .

Soit  $\Sigma$  le sous-ensemble de  $M_2(\mathbb{R})$  tel que  $\Sigma = \{ M_{x,y}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$ .

14. Quelle relation doivent vérifier  $x$  et  $y$  pour que la matrice  $M_{x,y}$  ne soit pas inversible ?

Calculer le produit  $M_{x,y} \times M_{-x,y}$ . En déduire l'inverse de  $M_{x,y}$  lorsqu'il existe.

15.  $\Sigma$  est-il un sous-espace vectoriel de  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$  ? On justifiera sa réponse.

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  et  $J = \{ A + M_{x,y}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$ .

16. Montrer que  $J$  est un sous-espace vectoriel de  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ .

17. Quelle est la dimension de  $J$  ? Déterminer une base de  $J$ .

18. Montrer que la loi  $\times$  est interne dans  $J$ .

### Étude d'une application de $M_2(\mathbb{R})$ .

Soit  $B$  une matrice quelconque de  $M_2(\mathbb{R})$ . Soit  $\varphi_B$  l'application de  $M_2(\mathbb{R})$  dans  $M_2(\mathbb{R})$  qui à la matrice  $X$  associe la matrice  $\varphi_B(X) = B \times X$ .

19. Montrer que  $\varphi_B$  est un endomorphisme de l'espace vectoriel  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ .

20. On suppose dans cette question que  $B = M_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

20.a  $\varphi_B$  est-elle surjective ? Bijective ?

20.b . Déterminer la matrice de  $\varphi_B$  dans la base canonique de  $M_2(\mathbb{R})$ .

On rappelle que la base canonique de  $M_2(\mathbb{R})$  est constituée des matrices

$(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$  où  $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

21. On prend dans cette question  $B = M_{0,-2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ .  $\varphi_B$  est-elle surjective ? Bijective ?

# FIN



