

Espaces préhilbertiens réels

1

Correction

Ex 1 : 10) $\rightarrow \psi(P, Q) = \psi(Q, P)$: OK
 (Enoncé)
 $\rightarrow \psi(P_1 + P_2, Q) = \sum_{k=0}^n (P_1(k) + P_2(k)) \cdot Q(k) = \sum_{k=0}^n P_1(k)Q(k) + \sum_{k=0}^n P_2(k)Q(k) = \psi(P_1, Q) + \psi(P_2, Q)$
 $\rightarrow \psi(P, P) = \sum_{k=0}^n (P(k))^2 \geq 0$
 $\rightarrow$ Supp. que $\psi(P, P) = 0$ et $\cap$ p.e. $P = 0$:
 $\psi(P, P) = 0 \Rightarrow (\forall k \leq n, P(k) = 0)$ (car $\forall k, P(k)^2 \geq 0$ et leur somme est nulle)
 or $\deg(P) \leq n$ et possède $(n+1)$ racines distinctes
 alors $\boxed{P=0}$

20) Pour ψ forme bilinéaire symétrique et positive : Clavier simple

$\rightarrow$ Soit $f \in C([-1, 2], \mathbb{R})$ t. que $\psi(f, f) = 0$, $\cap$ p.e. $f = 0$.

On a $\int_{-1}^1 f^2(t)(1-t^2) dt = 0$ alors : $(\forall t \in [-1, 2], f^2(t)(1-t^2) = 0)$
 continue et positive

$\Rightarrow (\forall t \in [-1, 2], f(t) = 0)$ (car $\forall t \in [-1, 1], 1-t^2 \neq 0$)

$\Rightarrow f = 0$ sur $[-1, 2]$ vu la continuité de f sur $[-1, 2]$

Ex 2 : Notons : $U_1 = (1, 1, 1)$; $U_2 = (1, -2, 1)$; $U_3 = (1, 1, -2)$

10) $E_1 = \frac{1}{\|U_1\|} \cdot U_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)$

20) $\rightarrow U_2 - \langle U_2 | E_1 \rangle \cdot E_1 \xrightarrow{\text{on trouve}} (1, -2, 1)$; $\|(1, -2, 1)\| = \sqrt{6}$
 $E_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (1, -2, 1)$

30) $\left\{ \begin{array}{l} U_3 - (\langle U_3 | E_1 \rangle \cdot E_1 + \langle U_3 | E_2 \rangle \cdot E_2) \xrightarrow[\text{calculs}]{\text{après}} \frac{3}{2} (1, 0, -1) \\ E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, -1) \end{array} \right.$

c/c : (E_1, E_2, E_3) est la base orthonormée construite via Gr-Schmidt à partir de la base (U_1, U_2, U_3) de $\mathbb{R}^3$

Ex 3 : $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$; avec $\begin{cases} e_1 = (1, 0, 1, 0) \\ e_2 = (1, -1, 1, -1) \end{cases}$

(2)

1a) On construit une famille orthonormale via Gram-Schmidt à partir de la famille libre (e_1, e_2) :

$$\rightarrow \boxed{E_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1, 0)} \quad ((\text{après calculs}))$$

$$\rightarrow E_2 = \frac{U_2}{\|U_2\|} \text{ ; où } U_2 = e_2 - (\langle e_2 | E_1 \rangle \cdot E_1) = (0, -1, 0, -1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1, 0) \\ E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -1, 0, -1) \end{cases} \quad ; \boxed{(E_1, E_2) \text{ est une base de } F}$$

2a) $x = (1, 1, 1, 1)$; Calculons $d = d(x, F)$:

On a $d = \|x - P_F(x)\|$; où $P_F(x)$ est la projection orthogonale de x sur F .

→ Méthode 1 pour la détermination de $P_F(x)$:

$$\text{On a : } P_F(x) = \underbrace{\langle x | E_1 \rangle}_{=\sqrt{2}} \cdot E_1 + \underbrace{\langle x | E_2 \rangle}_{=-\sqrt{2}} \cdot E_2 \quad (\text{car } (E_1, E_2) \text{ une base de } F)$$

on trouve $(1, 1, 1, 1)$

→ Méthode 2 : $P_F(x) = \alpha e_1 + \beta e_2$ (sans utiliser la base de F dans 1°)

Déterminons α et β :

$$\text{On sait que } \begin{cases} \langle x - P_F(x) | e_1 \rangle = 0 \\ \langle x - P_F(x) | e_2 \rangle = 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{car } (x - P_F(x)) \perp F \\ \text{et } F = \text{Vect}(e_1, e_2) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \langle e_1 | e_1 \rangle + \beta \langle e_2 | e_1 \rangle = \langle x | e_1 \rangle \\ \alpha \langle e_1 | e_2 \rangle + \beta \langle e_2 | e_2 \rangle = \langle x | e_2 \rangle \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 2 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\beta = -1 \text{ et } \alpha = 2)$$

$$\text{Donc } P_F(x) = 2e_1 - e_2 = (1, 1, 1, 1) \quad \boxed{\text{B}}$$

$$\text{; car } \begin{cases} \langle e_1 | e_2 \rangle = 2 \\ \langle e_1 | e_1 \rangle = 2 \\ \langle e_2 | e_2 \rangle = 4 \\ \langle x | e_1 \rangle = 2 \\ \langle x | e_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

→ Conclusion : $P_F(x) = (1, 1, 1, 1) = x \Rightarrow \boxed{d = \|x - P_F(x)\| = 0} \quad \boxed{\text{B}}$

R1R : $x = (1, 1, 1, 1) \in F$ et ainsi $d(x, F) = 0$

EX4 :

3

Rappels :

1°) tr est linéaire

2°) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ et $\text{tr}({}^t A) = \text{tr}(A)$.

3°) $\text{tr}(E_{ij}) = \delta_{ij}$, où $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

4°) $E_{ij} \cdot E_{kl} = \delta_{jk} \cdot E_{il}$ et ${}^t E_{ij} = E_{ji}$

5°) $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ où $S_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) est l'espace des matrices symétriques (resp. antisymétriques)

6°) $S_n(\mathbb{R}) : \rightarrow \dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n^2+n}{2}$; $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n^2-n}{2}$
 $\rightarrow$ Une base de $S_n(\mathbb{R})$ est : $(E_{ij} + E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n} \cup (E_{ii})_{1 \leq i \leq n}$

$\rightarrow$ Une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est : $(E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}$

1°) $(A|B) = \text{tr}({}^t A \cdot B)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$; en effet :

i) $(A|B) = \text{tr}({}^t A \cdot B) = \text{tr}({}^t({}^t A B)) = \text{tr}({}^t B \cdot A) = (B|A)$; (symétrique)

ii) $(\lambda A + A'|B) = \text{tr}({}^t(\lambda A + A') \cdot B) = \text{tr}(\lambda \cdot {}^t A \cdot B + {}^t A' \cdot B)$
 $= \lambda \cdot \text{tr}({}^t A \cdot B) + \text{tr}({}^t A' \cdot B)$ (car tr est linéaire)
 $= \lambda(A|B) + (A'|B)$ (linéarité par rapport à la première place)

iii) Positivité : $\text{tr}({}^t A \cdot A) \geq 0$?

Notons $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ on a :

$$(A|A) = \text{tr}({}^t A \cdot A) = \sum_{i=1}^n ({}^t A \cdot A)_{ii} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n ({}^t A)_{ij} \cdot (A)_{ji} \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ji}^2 \geq 0$$

iv) Défini : Supp. que $(A|A) = 0$ et m. que $A = 0$

On a $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ji}^2 = 0$ alors : $(\forall i, j, a_{ji} = 0)$

$\Rightarrow A = 0$

Enfin, c'est un prod. scalaire

B⁰) $B = (E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$. (4)

M. que B est une base orthonormée :

Soient E_{ij} et E_{kl} deux vecteurs de B . Il s'agit de vérifier que :

$$\begin{cases} \text{si } (i, j) \neq (k, l), & (E_{ij} | E_{kl}) = 0 \\ \text{si } (i, j) = (k, l), & (E_{ij} | E_{kl}) = 1 \end{cases}$$

→ suppl. de $(i, j) = (k, l)$ (càd $i = k$ et $j = l$) :

$$\begin{aligned} \text{On a } (E_{ij} | E_{kl}) &= \text{tr}({}^t E_{ij} \cdot E_{kl}) = \text{tr}(E_{ji} \cdot E_{kl}) = \text{tr}(\delta_{ik} \cdot E_{jl}) \\ &\quad \underbrace{\text{tr linéaire}}_{= \delta_{jl}} \delta_{ik} \cdot \underbrace{\text{tr}(E_{jl})}_{= 1} = \delta_{ik} \cdot \delta_{jl} = 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

→ si $(i, j) \neq (k, l)$, on a $(i \neq k \text{ ou } j \neq l)$

$$\Rightarrow (\delta_{ik} = 0 \text{ ou } \delta_{jl} = 0)$$

$$\Rightarrow \delta_{ik} \cdot \delta_{jl} = 0 \quad ; \quad \text{et on veut de vérifier que : } (E_{ij} | E_{kl}) = \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}$$

$$\text{Donc } (E_{ij} | E_{kl}) = 0 \quad \square$$

20) On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; on a :

$$|\text{tr}(A)| = |\text{tr}({}^t I_n \cdot A)| \leq |(I_n | A)| \leq \underbrace{\sqrt{(I_n | I_n)}}_{= \sqrt{n}} \cdot \underbrace{\sqrt{(A | A)}}_{= \|A\|} = \sqrt{n} \cdot \|A\| \quad \square$$

30) i) $S^\perp = \sqrt{n} A$; avec A l'esp. des matrices antisymétriques ; on a :

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, on a :

$$A \in S^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n\}, \langle A | E_{ii} \rangle = 0 \\ \forall i < j, \langle A | E_{ij} + E_{ji} \rangle = 0 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

or $A = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} E_{ij}$ et que $(E_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$ est une base orthonormée

de $M_n(\mathbb{R})$, alors :

$$\boxed{(A | E_{ij}) = a_{ij}, \text{ pour tout } i, j}$$

$$A \text{ anti-sym}, \quad \textcircled{\Sigma} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i, a_{ii} = 0 \\ \forall i < j, a_{ij} + a_{ji} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall i, a_{ii} = 0 \\ \forall i \neq j, a_{ij} + a_{ji} = 0 \end{cases}$$

④ Bis

$$\Leftrightarrow \forall (i,j) \in (\{1, \dots, n\})^2, a_{ij} + a_{ji} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall (i,j), ({}^tA + A)_{ji} = 0$$

$$\Leftrightarrow {}^tA + A = 0 \Leftrightarrow {}^tA = -A \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}$$

Enfin: $A \in S^\perp \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}$; car $[S^\perp = \mathcal{A}]_B$

ii) $A = (a_{ij})$ matrice fixée; $I = \inf_{(m_{ij}) \in S} \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{ij} - m_{ij})^2$

On a $\|A - M\|^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{ij} - m_{ij})^2$ et $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

abs $I = \inf_{M \in S} (\|A - M\|^2)$

$$= \left(\inf_{M \in S} \|A - M\| \right)^2 = (d(A, S))^2$$

où $d(A, S)$ la distance de A au sev. S .

Il suffit que: $d(A, S) = d(A, P_s(A)) = \|A - P_s(A)\|$, avec $P_s(A)$ est la projection orthogonale de A sur S .

et d'autre part, on a: $A = \underbrace{\frac{A + {}^tA}{2}}_{\in S} + \underbrace{\frac{A - {}^tA}{2}}_{\in \mathcal{A} = S^\perp}$

$$\Rightarrow P_s(A) = \frac{A + {}^tA}{2}; \text{ d'où } d(A, S) = \left\| \frac{A - {}^tA}{2} \right\|$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4} \|A - {}^tA\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i,j \leq n} \left((A - {}^tA)_{ij} \right)^2 \quad \left(\|M\|^2 = \sum_{i,j} m_{ij}^2 \right)$$

Conclusion: $\inf_{(m_{ij}) \in S} \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{ij} - m_{ij})^2 \right) = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{ij} - a_{ji})^2$

(5)

Ex 5 :

1°) Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $\underbrace{\|e_j\|^2}_{=1} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |(e_j | e_i)|^2 + \underbrace{|(e_j | e_j)|^2}_{= \|e_j\|^4 = 1}$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |(e_j | e_i)|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \forall i \neq j, (e_j | e_i) = 0$$

d'où : $\forall j, \forall i \neq j, (e_j | e_i) = 0$ | i.e. $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthogonale.

2°) $y = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle \cdot e_i$

On a : $\|x - y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x | y \rangle$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (\langle x | e_i \rangle)^2$$

$$\|y\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle \cdot e_i \right\|^2 \xrightarrow[\text{une famille orthogonale}]{\text{car } (e_i)_{i=1}^n \text{ est}} \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle^2$$

$$\langle x | y \rangle = \left\langle x \left| \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle \cdot e_i \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle \cdot \langle x | e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle^2$$

d'où $\|x - y\|^2 = 0$

3°) $B = (e_1, \dots, e_n)$: B est génératrice d'après 2°) i.e. B est b.e.

$$\forall x \in E, x = y = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle \cdot e_i$$

or B est libre tant que famille orthogonale de E de vecteurs tous non nuls (de norme 1)

alors B est une base de E.

Étant orthogonale (d'après 1°) et de vecteurs unitaires, B est

alors une base orthonormée de E

(6)

Ex 6 : On a : $\forall x \in E, \langle x/v(x) \rangle = 0$

$$\begin{aligned}
 1^o) \langle x+y/v(x+y) \rangle &= \langle x+y/v(x)+v(y) \rangle \\
 &= \underbrace{\langle x/v(x) \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y/v(y) \rangle}_{=0} + \langle x/v(y) \rangle + \langle y/v(x) \rangle \\
 &= \langle x/v(y) \rangle + \langle y/v(x) \rangle
 \end{aligned}$$

D'autre part, $\langle x-y/v(x-y) \rangle = 0$

2^o) $\text{Ker}(v) = (\text{Im } v)^\perp$; en effet :

$$1^o) \Rightarrow \boxed{\forall x, y \in E, \langle v(x)/y \rangle = -\langle x/v(y) \rangle} \quad (*)$$

Soit $x \in E$, on a :

$$x \in (\text{Im } v)^\perp \Leftrightarrow \forall y \in \text{Im } v, \langle x/y \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in E, \underbrace{\langle x/v(y) \rangle}_{= -\langle v(x)/y \rangle} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in E, \langle v(x)/y \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow v(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x \in \text{Ker}(v)} \quad \boxed{\text{Fin}}$$

A retenir !

Soit $a \in E$, on a :

$$(\forall x \in E, \langle a/x \rangle = 0) \Leftrightarrow a = 0$$