ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2015

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

MATHÉMATIQUES II - MP.

Extrait

J'ai ajouté ceci pour rendre la question faisable pour les 1ères années.

B. Variables aléatoires sous-gaussiennes

Dans toute la suite du problème, toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Soit $\alpha > 0$. On dit que la variable aléatoire X est α*-sous-gaussienne* si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{E}\left(\exp(tX)\right) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$

On rappelle la notation : $\mathrm{ch}(t) = \dfrac{\exp(t)+\exp(-t)}{2}$.

8) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}(t) \leqslant \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$.

On admet que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \mathrm{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \exp(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$$

9) Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $x \in [-1, 1]$, on a l'inégalité de convexité :

$$\exp(tx) \leqslant \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t).$$

10) Soit X une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée. Montrer que X est 1-sous-gaussienne. En déduire que, si X est une variable aléatoire bornée par $\alpha > 0$ et centrée, alors elle est α-sous-gaussienne.

11) Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et α-sous-gaussiennes, et $\mu_1, \ldots, \mu_n$ des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^{n} (\mu_i)^2 = 1$.

Montrer que la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i$ est α-sous-gaussienne.

12) Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $t > 0$:

$$P(X \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

En déduire que :

$$P(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

Fin Extrait