

Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes 2002 - Toutes filières - Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart. Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Problème d'analyse

- 1.1** Il est d'abord clair que f est continue (et même C^∞) sur $\mathbb{R} - \{0\}$. Au voisinage de 0, on sait que $\arctan t \sim_0 t$. Ceci entraîne que $\lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} f(t) = 1$, et donc f est continue sur $\mathbb{R}$. En outre, si $t \neq 0$,

$$f(-t) = \frac{\arctan(-t)}{-t} = \frac{-\arctan t}{-t} = f(t).$$

Ceci prouve que f est paire.

- 1.2** Il faut connaître le développement limité d' $\arctan t$:

$$\arctan(t) = t + o(t^2).$$

On en déduit que :

$$\frac{\arctan t}{t} = 1 + o(t).$$

f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 : f est dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.

- 1.3** f est dérivable en 0, et clairement aussi dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Si $t \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\frac{t}{1+t^2} - \arctan t}{t^2} \\ &= \frac{t - (\arctan t)(1+t^2)}{(1+t^2)t^2}. \end{aligned}$$

- 1.4** Il faut être un petit peu astucieux : on intègre $w \mapsto \frac{w}{(1+w^2)^2}$, dont une primitive est $w \mapsto \frac{-1/2}{1+w^2}$, et on dérive $w \mapsto w$. On en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2} dw &= \left[\frac{-w/2}{1+w^2} \right]_0^t + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{dw}{1+w^2} \\ &= \frac{-t/2}{1+t^2} + \frac{\arctan t}{2} \\ &= -\frac{1}{2} t^2 f'(t). \end{aligned}$$

Puisque $\frac{w^2}{(1+w^2)}$ est toujours positif, $\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2} dw$ est du signe de t , et la relation précédente entraîne que f' est du signe de $-t$. On en déduit que f est croissante sur $] -\infty, 0[$, et décroissante sur $] 0, +\infty[$.

1.5 Pour ébaucher l'allure de la courbe, en plus des éléments précédents (parité, sens de variation), on pourra calculer la valeur en ± 1 (ie $\frac{\pi}{4}$), et calculer les limites en $\pm\infty$ (nulles).

2.1 Par le théorème fondamental du calcul intégral, la fonction $g : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on en déduit que ϕ est continue, et même dérivable, sur $\mathbb{R}^*$. Au voisinage de 0, on a le développement limité suivant :

$$g(x) = 0 + f(0)x + o(x) = x + o(x).$$

On a donc, pour $x \neq 0$,

$$\phi(x) = 1 + o(1).$$

Appliquant le même raisonnement qu'à la question 1.1, on en déduit que ϕ est continue en 0. Finalement, si $x \in \mathbb{R}^*$, en effectuant le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \phi(-x) &= \frac{1}{-x} \int_0^{-x} f(t)dt \\ &= \frac{1}{-x} \left(- \int_0^x f(-u)du \right) \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x f(u)du \\ &= \phi(x). \end{aligned}$$

2.2 Si $x > 0$, puisque f est décroissante sur $[0, +\infty[$, on a, pour $t \in [0, x]$:

$$f(x) \leq f(t) \leq 1.$$

En intégrant cette inégalité (les bornes sont dans le bon sens), on obtient :

$$\int_0^x f(x)dt \leq \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^x dt,$$

ou encore :

$$xf(x) \leq x\phi(x) \leq x.$$

Il suffit de diviser par $x > 0$ pour obtenir le résultat. Le cas $x < 0$ se déduit par parité, et le cas $x = 0$ est trivial. Pour ceux qui se demandent d'où vient ce raisonnement "divin", le dessin de la question 1.5 pourra aider, en interprétant l'intégrale comme une aire.

2.3 Nous avons déjà prouvé que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et la dérivée vaut :

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t)dt \\ &= \frac{1}{x} (f(x) - \phi(x)). \end{aligned}$$

Au voisinage de 0, remarquons qu'avec les notations utilisées en 2.1, g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $g' = f$ et $g'' = f'$. On en déduit que g admet un développement limité d'ordre 2 en 0, avec

$$\begin{aligned} g(x) &= g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + o(x^2) \\ &= x + o(x^2) \end{aligned}$$

ϕ admet donc un développement limité d'ordre 1 en 0, donné par

$$\phi(x) = 1 + o(x).$$

Ainsi, ϕ est dérivable en 0, et $\phi'(0) = 0$.

D'autre part, puisque $f(x) - \phi(x) \leq 0$, $\phi'(x)$ est du signe de $-x$, et ϕ est décroissante sur $]0, +\infty[$, croissante sur $] -\infty, 0[$.

2.4 Pour $t \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\arctan t}{t} &\leq \frac{\pi/2}{t} \\ \int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt &\leq \int_1^x \frac{\pi/2}{t} dt = \frac{\pi \ln x}{2}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$0 \leq \frac{1}{x} \int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt \leq \frac{\pi \ln x}{2x}.$$

Par le théorème des gendarmes, on obtient que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) dt = 0.$$

Puisqu'il est clair que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{\arctan t}{t} dt = 0$, on a donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0.$$

2.5 Question laissée au lecteur.

3.1 L'inégalité de gauche est évidente. Posons, pour $t \geq 0$, $h(t) = \frac{t}{1+t^2}$. h est dérivable sur $[0, +\infty[$, avec

$$h'(t) = \frac{(1+t^2) - 2t \times t}{(1+t^2)^2} = \frac{-t^2+1}{(1+t^2)^2}.$$

De sorte, h' est positive sur $[0, 1]$ et négative sur $[1, +\infty[$. h admet donc, sur $[0, +\infty[$, un maximum en 1 qui vaut $1/2$. D'où le résultat.

3.2 D'après 2.2 et 2.3, si $x > 0$,

$$\begin{aligned} |\phi'(x)| &\leq \frac{1}{|x|} |f(x) - \phi(x)| \\ &\leq \frac{1}{x} (1 - f(x)) \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} (1 - f(x)) &= \frac{1}{x} \left(1 - \frac{\arctan x}{x} \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\int_0^x dt - \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt \\ &\leq \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t}{2} dt \\ &\leq \frac{1}{x^2} \left[\frac{t^2}{4} \right]_0^x \\ &\leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Puisque ϕ' est impaire (c'est la dérivée d'une fonction paire), l'inégalité reste vraie si $x < 0$, et elle est aussi vraie si $x = 0$ (cf question 2.3).

3.3 Posons $v(x) = \phi(x) - x$. v est dérivable sur $\mathbb{R}$, et la question précédente prouve que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $v'(x) \leq \frac{-3}{4}$. En outre, $\lim_{-\infty} v = +\infty$ et $\lim_{+\infty} v = -\infty$. v est donc une bijection (strictement décroissante) de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, il existe un unique α de $\mathbb{R}$ tel que $v(\alpha) = 0 \iff \phi(\alpha) = \alpha$. Puisque $v(0) = 1$ et $v(1) = 1 - \phi(1) \leq 0$ (voir 2.3), on en déduit que $\alpha \in]0, 1]$.

3.4 C'est classique! On a :

$$u_{n+1} - \alpha = \phi(u_n) - \phi(\alpha).$$

L'inégalité des accroissements finis associée à l'inégalité obtenue en 3.2 donne le résultat demandé. Par récurrence, il vient que

$$\begin{aligned} |u_n - \alpha| &\leq \frac{1}{4} |u_{n-1} - \alpha| \\ &\leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 |u_{n-2} - \alpha| \\ &\leq \dots \\ &\leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|. \end{aligned}$$

On en déduit que (u_n) converge vers α .

4.1 Résolvons d'abord cette équation différentielle sur $] -\infty, 0[$, où elle est équivalente à

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\arctan x}{x}.$$

On résoud d'abord l'équation sans second membre. Les solutions homogènes sont données par :

$$y_h(x) = C_1 e^{-\int_0^x \frac{dt}{t}} = C_1 e^{-\ln |x|} = \frac{C_1}{x}.$$

On résoud l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante, en posant $y(x) = \frac{C(x)}{x}$. L'équation différentielle est alors équivalente à

$$\frac{C'(x)}{x} = \frac{\arctan x}{x^2}.$$

On en déduit qu'une solution particulière est donnée par

$$y_p(x) = \phi(x),$$

et donc la solution générale sur $] -\infty, 0[$ est :

$$y_1(x) = \phi(x) + \frac{C_1}{x}.$$

De même, les solutions sur $]0, +\infty[$ sont données par :

$$y_2(x) = \phi(x) + \frac{C_2}{x}.$$

4.2 Si y est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$, il existe des constantes C_1 et C_2 telles que y coïncide avec y_1 sur $]0, +\infty[$ et avec y_2 sur $]0, +\infty[$. Puisque y doit être continue en 0 (elle est même dérivable), il est nécessaire que les fonctions y_1 et y_2 admettent des limites finies en 0. Ceci n'est possible que si $C_1 = C_2 = 0$: ϕ est la seule solution de l'équation sur $\mathbb{R}$.

FIN
