

## SÉRIES NUMÉRIQUES

### I) Convergence d'une série

#### 1) Généralités sur les séries

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite à valeurs dans  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

Notons  $S_n = u_0 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

#### Définitions 1 :

1) La suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  s'appelle la **série** de terme général  $u_n$ .

On la note  $\sum_{n \geq 0} u_n$ .

2) On dit que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  **converge** si et seulement si la suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  converge.

3) Dans le cas contraire, on dit que la série **diverge**.

#### Notations et vocabulaire :

1) Supposons que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge et  $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

$S$  s'appelle la **somme** de la série et se note  $\sum_{n \geq 0} u_n$ .

2)  $(S_n)_{n \geq 0}$  s'appelle la suite des **sommes partielles** de la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$ .

#### Notation et vocabulaire :

Supposons que la série  $\sum_{k \geq 0} u_k$  **converge**.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On sait que la série  $\sum_{k \geq n+1} u_k$  converge aussi.

1) La somme  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$  se note  $R_n$ .

2)  $R_n$  s'appelle le **reste** d'ordre  $n$  de la série  $\sum_{k \geq 0} u_k$ .

#### Proposition 2 :

Supposons que la série  $\sum_{k \geq 0} u_k$  converge. On a :

1)  $\forall n \in \mathbb{N}, S = S_n + R_n$

2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$

## 2) Condition nécessaire de convergence d'une série

### Proposition :

Si la série  $\sum_n u_n$  converge alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

### NB :

Par contraposée, on a :

1) Si  $(u_n)_n$  ne tend pas vers 0 alors la série  $\sum_n u_n$  diverge

2) Dans ce cas, on dit que la série  $\sum_n u_n$  diverge

## 3) Séries géométriques

### Proposition :

Soit  $q \in \mathbb{C}$ .

1)  $\sum_{n \geq 0} q^n$  converge  $\Leftrightarrow |q| < 1$

2) Dans ce cas :  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

### NB :

Idem pour  $\sum_{n \geq N} q^n$ . Et en cas de convergence on a :  $\sum_{n=N}^{+\infty} q^n = \frac{q^N}{1-q}$

### Proposition :

La suite  $(u_n)_n$  est télescopique si et seulement si la série télescopique

$$\sum_n (u_{n+1} - u_n)$$

### Corollaire 2 :

1) La somme d'une série convergente et une série divergente est une série

2) L'ensemble des séries convergentes est espace vectoriel.

3) L'application qui associe à une série convergente  $\sum_{n \geq 0} u_n$  sa somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

est linéaire

## 6) Convergence d'une série complexe

### Proposition :

Soient  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série complexe. On a :

1)  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge  $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \operatorname{Re}(u_n)$  et  $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im}(u_n)$  convergent

2) Le cas échéant, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(u_n)$$

## II) Séries à termes positifs

Toutes les séries qu'on verra dans ce paragraphe seront réelles positives.

### 1) Généralités

#### Proposition 1 :

$$\sum_n u_n \text{ converge} \Leftrightarrow (S_n)_n \text{ est bornée}$$

#### Corollaire 2 :

Si  $\sum_n u_n$  diverge alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

#### Proposition 3 :

Soient  $\sum_n u_n$  et  $\sum_n v_n$  deux séries à termes positifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$$

1) a)  $\sum_n v_n$  converge  $\Rightarrow \sum_n u_n$  converge

b) En cas de convergence, on a  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

2)  $\sum_n v_n$  diverge  $\Rightarrow \sum_n u_n$  diverge

### Corollaire 4 :

Soient  $\sum_n u_n$  et  $\sum_n v_n$  deux séries à termes positifs vérifiant :  $u_n = O(v_n)$ .

On a :

1)  $\sum_n u_n$  converge  $\Rightarrow \sum_n v_n$  converge

2)  $\sum_n v_n$  diverge  $\Rightarrow \sum_n u_n$  diverge

### NB :

Le corollaire 4 vaut aussi si on a  $u_n = o(v_n)$ .

### Corollaire 5 :

Soient  $\sum_n u_n$  et  $\sum_n v_n$  deux séries à termes positifs vérifiant :  $u_n \sim v_n$ .

On a :

1)  $\sum_n u_n$  converge  $\Leftrightarrow \sum_n v_n$  converge

2)  $\sum_n u_n$  diverge  $\Leftrightarrow \sum_n v_n$  diverge

## 2) Séries de Riemann

### Définition 1 :

Les séries de Riemann sont les séries de la forme  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ , où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

### Proposition 2 :

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On a :

1)  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  converge  $\Leftrightarrow \alpha > 1$

2)  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  diverge  $\Leftrightarrow \alpha \leq 1$

### Corollaire 3 : (Règle de $n^\alpha u_n$ )

Soit  $\sum_n u_n$  une série à termes positifs.

1)  $\left( \begin{array}{l} u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \\ \alpha > 1 \end{array} \right) \Rightarrow \sum_n u_n$  converge

2)  $\left( \begin{array}{l} \frac{1}{n^\alpha} = o(u_n) \\ \alpha > 1 \end{array} \right) \Rightarrow \sum_n u_n$  diverge

NB : Le corollaire 3 vaut aussi si on remplace "o" par "O".



### 3) Règle de D'Alembert

#### Proposition 3 : ( Règle de D'Alembert )

Soit  $\sum_n u_n$  une série à termes strictement positifs.

Notons  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ .

1)  $l < 1 \Rightarrow \sum_n u_n$  converge

2)  $l > 1 \Rightarrow \sum_n u_n$  diverge

3) Si  $l = 1$  on ne peut rien conclure sur la convergence ; (c-à-d que tout est possible)

### 4) Comparaison série-intégrale

#### Proposition 1 :

Soient  $n_0 \in \mathbb{N}$  et  $f : [n_0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si  $f$  est positive, continue par morceaux et décroissante alors :

$$\forall k \geq n_0 + 1, \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

#### Corollaire 2 :

Soient  $n_0 \in \mathbb{N}$  et  $f : [n_0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si  $f$  est positive, continue par morceaux et décroissante alors la série  $\sum_n \left( \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right)$

#### Proposition (Nature d'une série de Riemann)

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

### III) Séries alternées

#### Définition 1 :

On appelle série alternée toute série de l'une des formes suivantes :

$$\sum_n (-1)^n \alpha_n \text{ ou } \sum_n (-1)^{n-1} \alpha_n$$

où  $(\alpha_n)_n$  est une suite

## Proposition 2 : (Critère spécial pour les séries alternées)

Ou (Critère de Leibniz).

Soit  $(\alpha_n)_{n \geq n_0}$  une suite décroissante de limite nulle. On a :

- 1) La série alternée  $\sum_{n \geq n_0} (-1)^n \alpha_n$
- 2)  $\forall n \geq n_0$ ,  $\text{signe}(R_n) = \text{signe}(\text{du } R_n)$
- 3)  $\forall n \geq n_0$ ,  $|R_n| \leq |\text{du } R_n|$
- 4)  $\text{signe} \left( S = \sum_{k=n_0}^{+\infty} (-1)^k \alpha_k \right) = \text{signe}(\text{du 1er terme dans la somme } S)$

où  $R_n = \sum_{k=$

## IV) Séries absolument convergentes

### Définition 1 :

Soit  $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ . La série  $\sum u_n$  est dite absolument convergente si et seulement si la série positive  $\sum$

### Proposition 2 :

Toute série ACV est

### Proposition 3 :

Soient  $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  et  $\sum \alpha_n$  une série positive.

Si  $\begin{cases} u_n = O(\alpha_n) \\ \sum \alpha_n \text{ converge} \end{cases}$  alors  $\sum$  est

### Proposition 4 : (Règle de D'Alembert)

Soient  $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  ne s'annulant pas à partir d'un rang.

Notons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = L$ .

- 1) Si  $L < 1$  alors  $\sum u_n$  est
- 2) Si  $L > 1$  alors  $\sum u_n$
- 3) Si  $L = 1$ , on ne peut rien conclure.

## V) Sommation des relations de comparaison

### 1) Comparaison des restes

#### Proposition :

Soient  $\sum_n u_n$  une série à termes dans  $\mathbb{K}$  et  $\sum_n \alpha_n$  une série à termes positifs.

- 1) Si  $\begin{cases} u_n = o(\alpha_n) \\ \sum_n \blacksquare \text{ converge} \end{cases}$  alors  $\left( \sum_{k=\blacksquare} u_k \right) = o \left( \sum_{k=\blacksquare} \alpha_k \right)$
- 2) Si  $\begin{cases} u_n = O(\alpha_n) \\ \sum_n \blacksquare \text{ converge} \end{cases}$  alors  $\left( \sum_{k=\blacksquare} u_k \right) = O \left( \sum_{k=\blacksquare} \alpha_k \right)$
- 3) Si  $\begin{cases} u_n \sim \alpha_n \\ \sum_n \blacksquare \text{ converge} \end{cases}$  alors  $\left( \sum_{k=\blacksquare} u_k \right) \sim \left( \sum_{k=\blacksquare} \alpha_k \right)$

### 2) Comparaison des sommes partielles

#### Proposition :

Soient  $\sum_n u_n$  une série à termes dans  $\mathbb{K}$  et  $\sum_n \alpha_n$  une série à termes positifs.

- 1) Si  $\begin{cases} u_n = o(\alpha_n) \\ \sum_n \blacksquare \text{ diverge} \end{cases}$  alors  $\left( \sum_{k=\blacksquare} u_k \right) = o \left( \sum_{k=\blacksquare} \alpha_k \right)$
- 2) Si  $\begin{cases} u_n = O(\alpha_n) \\ \sum_n \blacksquare \text{ diverge} \end{cases}$  alors  $\left( \sum_{k=\blacksquare} u_k \right) = O \left( \sum_{k=\blacksquare} \alpha_k \right)$
- 3) Si  $\begin{cases} u_n \sim \alpha_n \\ \sum_n \blacksquare \text{ diverge} \end{cases}$  alors  $\left( \sum_{k=\blacksquare} u_k \right) \sim \left( \sum_{k=\blacksquare} \alpha_k \right)$

*Fin*