ECOLE POLYTECHNIQUE

ESPCI

CONCOURS D'ADMISSION 2026

MARDI 14 AVRIL 2026
08h00 - 12h00

FILIERES MP-MPI - Epreuve n° 3

MATHEMATIQUES B

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

EXTRAIT

Première Partie

2. Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $[0,1]$. On considère les suites réelles $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et $(w_n)_{n\geqslant 1}$ définies par

$$\forall n \geqslant 1, \qquad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n+1}\right), \qquad w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{2n+1}\right).$$

Montrer que les suites $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et $(w_n)_{n\geqslant 1}$ convergent et ont la même limite.

3a. Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $[-2,2]$. Prouver que l'intégrale

$$I(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2} \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

est convergente, et que

$$I(f) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(2\cos(\theta))\mathrm{d}\theta.$$

3b. Pour un entier naturel n, on note f_n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$. Calculer la valeur de l'intégrale $I(f_n)$ pour lorsque n vaut 0, 1 et 2.

3c. Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, calculer la valeur de l'intégrale $I(f_n)$ en fonction de n.

Dans les questions qui suivent, pour tout entier $n \geqslant 1$ on considère U_n une variable aléatoire discrète uniforme à valeurs dans les entiers naturels compris entre 1 et n, c'est à dire que

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \qquad \mathbb{P}\left(U_n = k\right) = \frac{1}{n}.$$

4a. Si f est une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $[-2,2]$, prouver que

$$\mathbb{E}\left(f\left(2\cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right)\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2} \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

4b. Prouver que, pour tout $y \in [-2,2]$,

$$\mathbb{P}\left(2\cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right) < y\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{y} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Fin